

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2.	<ul style="list-style-type: none"> Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes. 	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.

04.6 Polynome et équations du 2nd degré (1S) ***

S	Progression	Supports
	1. FONCTIONS POLYNÔMES	
	2. FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ A - Définitions B - Racines et factorisation du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ C - <i>Signe du polynôme</i> $P(x) = ax^2 + bx + c$	

<http://www.maths-cours.fr/>

1. Fonctions polynômes

Définition

Une fonction P est une **fonction polynôme** si elle est définie sur \mathbb{R} et si on peut l'écrire sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Remarques

- par abus de langage, on dit souvent polynôme au lieu de fonction polynôme.
- les nombres a_i s'appellent les **coefficients** du polynôme.

Définition (Degré d'un polynôme)

Si $a_n \neq 0$ dans l'écriture $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, on dit que P est une fonction polynôme de **degré n** .

Cas particuliers

- la fonction nulle n'a pas de degré
- une fonction constante non nulle définie par $f(x) = a$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 0
- une fonction affine $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 1

Propriété

Le produit d'un polynôme de degré n par un polynôme de degré m est un polynôme de degré $m+n$.

Remarque

Il n'existe pas de formule donnant le degré d'une somme de polynôme. On peut tout au plus dire que $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Propriété

Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Cas particulier

P est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Définition

On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une **racine** du polynôme P si et seulement si $P(a) = 0$.

Exemple

1 est racine du polynôme $P(x) = x^3 - 2x + 1$ car $P(1) = 0$.

Théorème

Si P est un polynôme de degré $n \geq 1$ et si a est une racine de P alors $P(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = (x-a) Q(x)$$

où Q est un polynôme de degré $n - 1$.

2. Fonctions polynômes du second degré

A - Définitions

Définition

On appelle polynôme (ou trinôme) du second degré toute expression pouvant se mettre sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemples

- $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$ est un polynôme du second degré.
- $P(x) = x^2 - 1$ est un polynôme du second degré avec $b = 0$ mais $Q(x) = x - 1$ n'en est pas un car $a = 0$ (c'est un polynôme du premier degré ou une fonction affine)
- $P(x) = (x - 1)(3 - 2x)$ est un polynôme du second degré car en développant on obtient une expression du type souhaité.

Théorème et définition

Tout polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$

Cette expression s'appelle **forme canonique** du polynôme P .

La courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$.

Définition

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

B - Racines et factorisation du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

Propriété (Racines d'un polynôme du second degré)

Soit l'équation $x^2 + bx + c = 0$:

- si $\Delta < 0$: aucune solution réelle

- si $\Delta = 0$: une solution unique $x_0 = \alpha = -\frac{b}{2a}$

- si $\Delta > 0$: alors deux solutions $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples

• $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$

$\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1$ donc P_1 possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4}{-2} = 2$$

• $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$

$\Delta = 16 - 16 = 0$ donc P_2 possède une racine

$$x_1 = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

• $P_3(x) = x^2 + x + 1$

$\Delta = 1 - 4 = -3$ donc P_3 ne possède aucune racine

Propriété (Somme et produit des racines)

Soit un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ dont le discriminant est strictement positif.

• La somme des racines vaut $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

• Le produit des racines vaut $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Remarque

Ces propriétés sont souvent utilisés pour résoudre rapidement une équation qui possède une racine "évidente".

Par exemple l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet $x_1 = 1$ comme racine puisque

$1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$; comme $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 3$ l'autre racine est $x_2 = 3$.

Tableau de factorisation à partir des racines :

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Factorisation de $ax^2 + bx + c$	$= a(x - x_1)(x - x_2)$	$= a(x - x_0)^2$	<i>Pas de factorisation</i>

C - Signe du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

Propriété (Signe d'un polynôme du second degré)

Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

- si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours du signe de a

- si $\Delta = 0$, $P(x)$ est toujours du signe de a mais s'annule en $x_0 = \alpha = -\frac{b}{2a}$

- si $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de a « à l'extérieur des racines » ($]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$) et du signe opposé « entre les racines » (sur $]x_1; x_2[$)

Remarque

Suivant chacun des cas on peut représenter le tableau de signe de P de la façon suivante :

$\Delta = b^2 - 4ac$	Signe de $ax^2 + bx + c$				
$\Delta > 0$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
	$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0
$\Delta = 0$	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	
	$P(x)$	signe de a		0	signe de a
$\Delta < 0$	x	$-\infty$			$+\infty$
	$P(x)$	signe de a			

Exemples

Si l'on reprend les exemples précédents :

- $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$ et $\Delta = 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$P(x)$	-	0	+	0	-

- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$ et $\Delta = 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$P(x)$	+	0	+

- $P_3(x) = x^2 + x + 1$ et $\Delta = -3$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	+	

On rappelle que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de l'axe des abscisses.

L'ESSENTIEL

POLYNÔMES ET ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

1. Fonctions polynômes

Définition

Une fonction P est une **fonction polynôme** de **degré** n , si elle est définie sur \mathbb{R} et si on peut l'écrire sous la forme :
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Définition

On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une **racine** du polynôme P si et seulement si $P(a) = 0$.

Théorème

Si P est un polynôme de degré $n \geq 1$ et si a est une racine de P alors $P(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = (x-a) Q(x)$$

où Q est un polynôme de degré $n - 1$.

2. Fonctions polynômes du second degré

A - Définitions

Théorème et définition

Tout polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = P(\alpha)$$

Cette expression s'appelle **forme canonique** du polynôme P .

La courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$.

Définition

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

B - Racines et factorisation du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

Propriété (Racines d'un polynôme du second degré)

Soit l'équation $x^2 + bx + c = 0$:

- si $\Delta < 0$: aucune solution réelle

- si $\Delta = 0$: une solution unique $x_0 = \alpha = -\frac{b}{2a}$

- si $\Delta > 0$: alors deux solutions $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Propriété (Somme et produit des racines)

Soit un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ dont le discriminant est strictement positif.

• La somme des racines vaut $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

• Le produit des racines vaut $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Tableau de factorisation à partir des racines :

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Factorisation de $ax^2 + bx + c$	$= a(x - x_1)(x - x_2)$	$= a(x - x_0)^2$	Pas de factorisation

C - Signe du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

$\Delta = b^2 - 4ac$	Signe de $ax^2 + bx + c$															
$\Delta > 0$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$P(x)$</td> <td>signe de a</td> <td>0</td> <td>signe de $-a$</td> <td>0</td> <td>signe de a</td> </tr> </table>					x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$												
$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a											
$\Delta = 0$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$P(x)$</td> <td>signe de a</td> <td>0</td> <td>signe de a</td> </tr> </table>					x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$P(x)$	signe de a	0	signe de a			
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$													
$P(x)$	signe de a	0	signe de a													
$\Delta < 0$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$P(x)$</td> <td colspan="2">signe de a</td> </tr> </table>					x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	signe de a						
x	$-\infty$	$+\infty$														
$P(x)$	signe de a															

EXERCICES DE SOUTIEN

POLYNÔMES ET ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Thèmes Mathenpoche 2 -	Exercices Sesamath 1ère S, p 19+
1. ACTIVITÉS MENTALES	Ex 1 - 4 - 5 - 8
2. FONCTIONS DU SECOND DEGRÉ	Ex p 20 9 - 12 - 16 - 21 + 22 + 23 + 28
3. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ	Ex p 22 30 - 34 - 38 Problèmes 44 - 47 + 31 + 32 + 33 + 37
4. INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ	Ex p 25 51 - 54 + 50 + 52 + 53
5. QCM D'AUTO-ÉVALUATION	P 28 et 29

Sur feuille

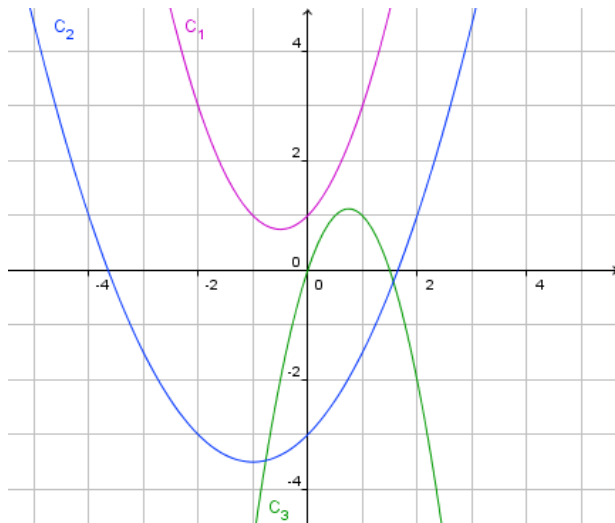
1. RÉOLUTION GRAPHIQUE	Ex 1 - 2
2. RÉOLUTION DU TRINÔME	Ex 3 - 5 - 9 - 10 - 11
3. RÉOLUTIONS DIVERSES	Ex 14 - 15 - 16 - 17

LA RÉOLUTION GRAPHIQUE DU TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

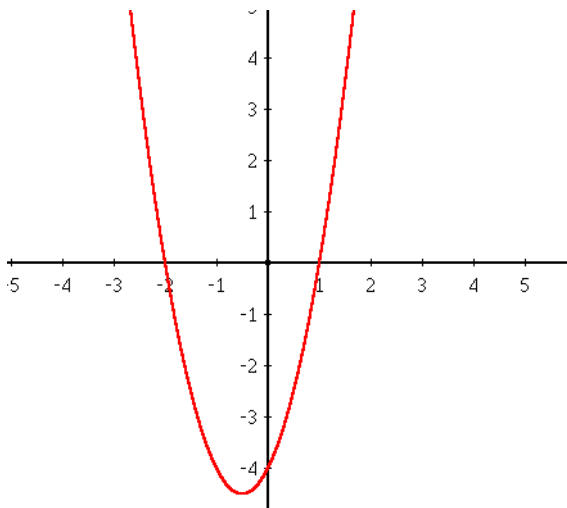
1 Courbes trinômes du second degré

Associer chacune des fonctions suivantes à sa courbe représentative :

- $f(x) = 0,5x^2 + x - 3$
- $g(x) = x^2 + x + 1$
- $h(x) = -2x^2 + 3x$



2 Le graphique représente la courbe du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, a , b et c des réels)



- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$
- Sachant que la forme factorisée du trinôme est $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$, (x_1 et x_2 ses racines), à l'aide du graphique retrouver l'expression de $f(x)$
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$

RÉSOLUTION DU TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

3 Résoudre les équations :

- $x^2 - 2x = 0$
- $x^2 - 2x + 1 = 0$
- $x^2 - 2x - 3 = 0$

4 Résoudre les équations :

- $x^2 - 2x + 1,5 = 0$
- $x^2 - x - 6 = 0$
- $x^2 + x + 1 = 0$

5 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $-x^2 + 6x - 9 = 0$
- $2x^2 + x - 4 = 0$
- $2x^2 - 5x - 3 = 0$

6 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- $-3x^2 + 5x - 5 = 0$
- $4x^2 - 7x - 2 = 0$

7 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $x^2 + x + 2 = 0$
- $2x^2 - 11x + 12 = 0$
- $6x^2 + x - 2 = 0$

8 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $5x^2 + 6x + 1 = 0$
- $x^2 - 5x + 4 = 0$
- $x^2 - 2x + 2 = 0$

9 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $3x^2 - 10x + 3 = 0$
- $2x^2 + 8x + 8 = 0$
- $-4x^2 - 4x - 1 = 0$
- $3x^2 + 2x - 1 = 0$
- $16x^2 + 40x + 25 = 0$

10 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $f(x) = x^2 - 64$
- $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$
- $h(x) = 4x^2 + 4x + 1$
- $j(x) = 8x^2 + 30x + 25$

11 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- $x(x + 6) > 21 + 2x$
- $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

PROBLÈMES

12 Pour sa quinzaine commerciale un magasin accorde une remise de $x\%$ puis une ristourne de $x\%$.

- a) Démontrer que la prix d'un article de 600 € initialement est après les réductions $0,06x^2 - 12x + 600$
- b) Quel doit être le pourcentage x pour que le prix de vente soit de 337,50 €
- c) Sachant que le coût de revient de l'article est de 250 €, Quel doit être le pourcentage maximum x pour ne pas perdre de l'argent.
(Il faut traduire le problème en inéquation et déduire le signe du trinôme)

13 Le Vendée globe

Avant le départ de la course, Yves et ses amis s'amuse à pronostiquer le résultat de l'édition de cette année.

Afin de pimenter leur jeu, ils décident de parier sur la victoire finale de leur favori.

Chacun d'eux mettra en jeu une somme égale au double de leur nombre .

A l'issue de la course Yves reçoit x Euro de chaque participant, ce qui lui fait la coquette somme de 112 Euro.

- a) Démontrer que le gain d'Yves se traduit par
- b) Calculer la somme pariée par chaque participant au jeu.
- c) En déduire une factorisation du trinôme .

14 Équation du second degré avec paramètre

On considère l'équation (E) d'inconnue x :

$$x^2 - mx + 41 = 0 \text{ où } m \text{ est réel } (m \text{ est appelé paramètre })$$

Discuter du nombre de solution(s) de (E) selon les valeurs de m .

15 Inéquations se ramenant au 2nd degré

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{4}{x-1} \geq x+2$$

16 Une équation du troisième degré

Soit la fonction polynôme f définie par :

$$f(x) = x^3 - 4x + 3$$

- a) Calculer $f(1)$.
- b) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x : $f(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b)$
- c) En déduire les racines de f .

17 Résolution d'inéquations du second degré à l'aide d'un graphique

Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 3x + 2$

- a) Résoudre l'équation $f(x) = 4$
- b) Résoudre l'équation $f(x) = 2$
- c) A l'aide d'un graphique trouver l'ensemble des valeurs de x telles que $2 \leq f(x) \leq 4$