

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
	.	

07.6 Fonction dérivée (1S) ***

S	Progression	Supports
1	=> ACTIVITÉ 3 p 117 1. NOMBRE DERIVE ET TANGENTE A - Nombre dérivé	Oral p126 : QCM 24 Ex p 126+ : 22 – 23 – 26 – 27 -28
2 3	=> ACTIVITÉ 1 p 116 B - Tangente à la courbe et interprétation graphique	Oral p126 : QCM 34 Ex p 127 : 35 – 37 – 38 – 41 - 45
4 5	2. FONCTION DÉRIVÉE	Oral p133 : QCM 60 – 61 – 62 Ex p 133 : 64 - 65c – 75 – 77 - 79 81 - 83
6 7	=> ACTIVITÉ 4 p 117 3. FONCTION DÉRIVÉ ET SENS DE VARIATION	Ex p 135 : 68 – 87 – 90 - 95 - 93 BAC (105) – (106) - 108 QCM p 125

<http://www.maths-cours.fr/>

1. Nombre dérivé et tangente

A - Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient 2 réels x_0 et $h \neq 0$ tels que $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$.

Le **taux de variation** (ou **taux d'accroissement**) de la fonction f entre x_0 et $x_0 + h$ est le nombre :

$$T = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Définition

Une fonction f est **dérivable** en x_0 si et seulement si le nombre $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a pour limite un certain réel l lorsque h tend vers 0.

l est appelée **nombre dérivé** de f en x_0 , on le note $f'(x_0)$.

On écrit :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Remarques

- Le quotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$
- « le nombre $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a pour limite un certain réel l lorsque h tend vers 0 » signifie que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se rapproche de l lorsque h se rapproche de 0.

Une définition plus rigoureuse de la notion de limite sera vue en Terminale

- On peut également définir le nombre dérivé de la façon suivante:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(cela correspond au changement de variable $x = x_0 + h$)

Exemple

Calculons le nombre dérivé de la fonction $f: x \mapsto x^2$ pour $x = 1$.

Ce nombre se note $f'(1)$ et vaut :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2+h = 2$$

B - Tangente à la courbe et interprétation graphique

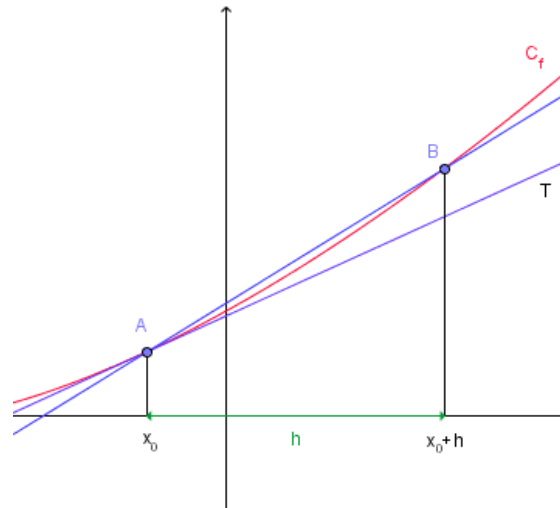
Soit C_f la courbe représentative de la fonction f dérivable en x_0 .

Lorsque h tend vers 0, B "se rapproche" de A et la droite (AB) se rapproche de la tangente T .

Le nombre dérivée $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_0 .

Remarque :

Interprétation graphique du nombre dérivé



Propriété

Soit f une fonction dérivable en x_0 de courbe représentative C_f , l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 est :

$$y = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0)$$

Démonstration

D'après la propriété précédente, la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 est une droite de coefficient directeur $f'(x_0)$. Son équation est donc de la forme :

$$y = f'(x_0) x + b$$

On sait que la tangente passe par le point A de coordonnées $(x_0; f(x_0))$ donc :

$$f(x_0) = f'(x_0) x_0 + b$$

$$b = -f'(x_0) x_0 + f(x_0)$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y = f'(x_0) x - f'(x_0) x_0 + f(x_0)$$

Soit : $y = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0)$

2. Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est **dérivable** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, le nombre dérivé $f'(x)$ existe.

La fonction qui à $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x s'appelle la **fonction dérivée** et se note f' .

Propriétés : Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
• k ($k \in \mathbb{R}$)	0	$\mathbb{R}$
• x	1	$\mathbb{R}$
• x^n ($n \in \mathbb{N}$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
• $\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
• $\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Propriétés : Formules de base

Si u et v sont 2 fonctions dérivables sur un intervalle I . Sur cet intervalle :

Fonction	Dérivée
• $u + v$	$u' + v'$
• ku ($k \in \mathbb{R}$)	ku'
• $\frac{1}{u}$ (avec $u(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{-u'}{u^2}$
• uv	$u'v + uv'$
• $\frac{u}{v}$ (avec $v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
• $\sqrt{u}$ (avec $u \geq 0$ sur I)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $u > 0$

Exemple

On cherche à calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

On pose : $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 1$

On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$

La dérivée du quotient est donc :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Remarques

- si le dénominateur d'une fraction est constant, il faut séparer le dénominateur de la fonction

Par exemple pour dériver $f(x) = \frac{x^2+1}{5}$ on écrira $f(x) = \frac{1}{5}(x^2+1)$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{1}{5} \times 2x \quad (\text{formule } (ku)' = ku')$$

- si le numérateur d'une fraction est constant, on utilisera la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

Par exemple, si $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$ on écrira $f(x) = 5 \times \frac{1}{x^2+1}$

$$\text{donc } f'(x) = 5 \times \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$$

3. Fonction dérivée et sens de variations

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

Remarque

Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sur I , alors f est **strictement** croissante (respectivement décroissante) sur I .

Mais la réciproque est fausse.

Une fonction peut être strictement croissante sur I alors que sa dérivée s'annule sur I . C'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule pour $x = 0$

Exemple

Reprenons la fonction de l'exemple précédent.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Le dénominateur de $f'(x)$ est toujours strictement positif.

Le numérateur de $f'(x)$ peut se factoriser : $(1 - x)^2 = (1 - x)(1 + x)$

Une facile étude de signe montre que f' est strictement négative sur $] -\infty; -1[$ et $] 1; +\infty[$ et est strictement positive sur $] -1; 1[$.

Par ailleurs, $f(-1) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$

On en déduit le tableau de variations de f (que l'on regroupe habituellement avec le tableau de signe de f') :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$						

L'ESSENTIEL

FUNCTION DÉRIVÉE

1. Nombre dérivé et tangente

A - Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient 2 réels x_0 et $h \neq 0$ tels que $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$.

Le **taux de variation** (ou **taux d'accroissement**) de la fonction f entre x_0 et $x_0 + h$ est le nombre :

$$T = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Définition

Une fonction f est **dérivable** en x_0 si et seulement si le nombre $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a pour limite un certain réel l lorsque h tend vers 0.

l est appelée **nombre dérivé** de f en x_0 , on le note $f'(x_0)$.

On écrit :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

B - Tangente à la courbe et interprétation graphique

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f dérivable en x_0 .

Lorsque h tend vers 0, B "se rapproche" de A et la droite (AB) se rapproche de la tangente T .

Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_0 .

Propriété

Soit f une fonction dérivable en x_0 de courbe représentative C_f , l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2. Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est **dérivable** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, le nombre dérivé $f'(x)$ existe.

La fonction qui à $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x s'appelle la **fonction dérivée** et se note f' .

Propriétés : Formules de base

Si u et v sont 2 fonctions dérivables sur un intervalle I . Sur cet intervalle :

Fonction	Dérivée
• $u + v$	$u' + v'$
• ku ($k \in \mathbb{R}$)	ku'
• $\frac{1}{u}$ (avec $u(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{-u'}{u^2}$
• uv	$u'v + uv'$
• $\frac{u}{v}$ (avec $v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
• $\sqrt{u}$ (avec $u \geq 0$ sur I)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $u > 0$

3. Fonction dérivée et sens de variations

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

Remarque

Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sur I , alors f est **strictement** croissante (respectivement décroissante) sur I .
Mais la réciproque est fausse.

Une fonction peut être strictement croissante sur I alors que sa dérivée s'annule sur I . C'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule pour $x = 0$

EXERCICES DE SOUTIEN

FONCTION DÉRIVÉE

Thèmes Mathenpoche 2 –	Exercices Sesamath 1ère S, p 67+
1. ACTIVITÉS MENTALES	Ex p 67 1 – 3 – 4 – 5
2. NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE	Ex p 68 10 – 12 – 14 - (18) +20 +22
3. DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS	Ex p 70 31 – 40 – 42 – 45 - (46) +47 + 50
4. QCM D'AUTO-ÉVALUATION	P 76 et 77

Thèmes Mathenpoche 2 –	Exercices Sesamath 1ère S, p 88+
1. ACTIVITÉS MENTALES	Ex p 88 1 – 4 – (5)
2. VARIATIONS DE FONCTIONS	Ex p 88 13 – 20 – (22) - 25 +10 +11 +12 +23 +26
3. POSITIONS RELATIVES	Ex p 91 30 – (32) +31 + 33
4. EXTREMA ET DÉRIVÉE	Ex p 92 35 – 37 - 40 +36 + 38 +41
5. QCM D'AUTO-ÉVALUATION	P 99, 100, 101

CALCUL DE DÉRIVÉES

1 Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = 4x^3 + x^2 + 6x + 5$
- b) $g(x) = 5x^2 - 3x$
- c) $h(x) = (x - 2)(x + 1)$
- d) $i(x) = (3x + 4)(3x - 4)$
- e) $j(x) = 3(2x - 1)(x - 4)$
- f) $k(x) = (2x + 1)^2$

2 Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- a) $l(x) = \frac{x+2}{x}$
- b) $m(x) = \frac{x+2}{(x-4)}$
- c) $n(x) = \frac{3x+1}{(2x+2)}$
- d) $o(x) = \frac{-6}{(x+2)}$
- e) $p(x) = 5 \frac{2x-1}{2x-1}$
- f) $q(x) = 5 \frac{2x-1}{2x+1}$

3 Calculez la dérivée des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$
- b) $g(x) = -\frac{2}{3}x$
- c) $h(x) = (4x - 1)(2x + 3)$
- d) $j(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

4 Calculez la dérivée des fonctions suivantes :

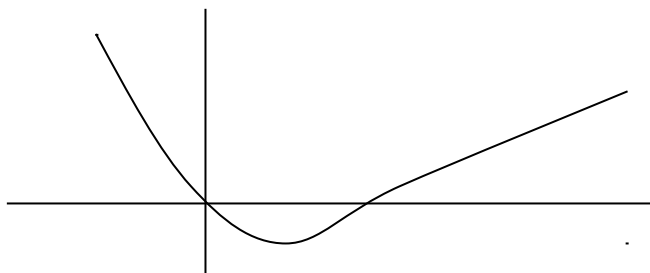
- a) $m(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + 3$
- b) $n(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
- c) $o(x) = (x - 2)^2$
- d) $p(x) = -\frac{2}{x} + 3$

5 Parmi les fonctions trinômes suivantes, indiquer celles qui vérifient la condition $f'(1) = 1$.

- a) $f(x) = x^2 - x - 1$
- b) $f(x) = -x^2 + x + 1$
- c) $f(x) = x^2 - 2x - 1$
- d) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
- e) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
- f) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

6 On considère la courbe suivante qui représente une certaine fonction f dans un repère orthonormé.

(Rem : il conviendrait d'ajouter des graduations. La courbe passe par l'origine, par le point de coordonnées $(2; 0)$ et admet un minimum en le point d'abscisse 1. En ce point l'ordonnée sera $-0,5$. Par ailleurs, en l'origine, la tangente à la courbe est la droite d'équation $y = -x$. On pourra dessiner cette tangente.)



Indiquer quelles sont, parmi les égalités suivantes, celles qui sont correctes :

- a) $f'(0) = -1$
- b) $f'(0) = 0$
- c) $f'(0) = 1$
- d) $f'(1) = -0,5$
- e) $f'(1) = 0$
- f) $f'(1) = 1$

7 Intersections de tangentes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

P est la parabole d'équation $y = x^2$

D_m est la droite d'équation $8mx - 4y + 1 = 0$

où $m \in \mathbb{R}$

- Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, P et D_m se coupent en deux points distincts A_m et B_m .
- Calculer les coordonnées du point d'intersection I_m des tangentes à la courbe P aux points A_m et B_m .
- Quel est l'ensemble des points I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

8 Tangentes communes

Soient C_f la courbe représentant la fonction définie par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

et C_g la courbe représentant la fonction définie par

$$g(x) = -x^2 + 2x - 3$$

Démontrer que C_f et C_g ont deux tangentes communes.

- 9** Soit la fonction f définie sur $[1, 2 ; 9]$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

- Déterminez la dérivée f' de la fonction f .
- Donnez le tableau de variation de la fonction f .
- Tracez dans un repère orthonormal (unité graphique 1 cm) la courbe C représentative de la fonction f .
- Tracez dans le même repère la droite D d'équation $y = -2x + 7$.
- Calculez les coordonnées des points d'intersection de D et de C .
Placez ces points sur le graphique.

10 Famille de fonctions

On considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f_n(x) = \frac{1-nx}{x-1}$$

où n est un entier relatif quelconque.

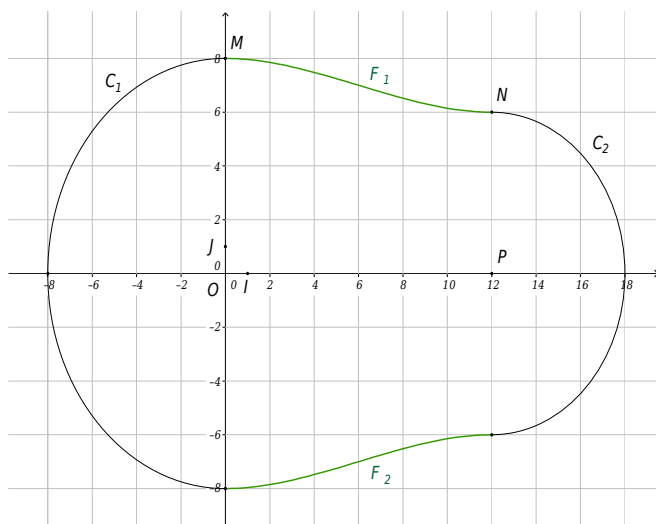
On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O; I, J)$.

- Montrer que pour tout entier n , la courbe (C_n) passe par le point $A(0; -1)$.
- Caractériser la courbe (C_1) représentant la fonction f_1 .
- Déterminer, suivant les valeurs de n , le sens de variation de la fonction f_n .
- Tracer les courbes (C_0) , (C_1) et (C_2) dans le même repère.
- On note (T_n) la tangente à la courbe (C_n) au point A . Donner les équations des droites (T_0) et (T_2) et tracer ces droites sur la figure précédente.

11 Fonctions – Contour d’une piscine

Pour les besoins d’un centre de loisirs, un architecte élabore les plans d’une future piscine carrelée.

Le graphique ci-dessous présente le contour de cette piscine dans un repère orthonormé (O,I,J) d’unité 1 mètre.



C_1 est un demi-cercle de centre O et de rayon 8 ;
 C_2 est un demi-cercle de centre P(12;0) et de rayon 6.
 Les courbes F_1 et F_2 relient ces deux demi-cercles.
 Le contour de la piscine est symétrique par rapport à l’axe des abscisses. On suppose, par ailleurs, que les tangentes à la courbe F_1 aux points M(0;8) et N(12;6) sont parallèles à l’axe des abscisses.

Partie 1

- f) La courbe F_1 est la représentation graphique d’une fonction f définie sur $[0;12]$.
 Quelles sont les valeurs de $f(0)$, $f(12)$, $f'(0)$, $f'(12)$?
- g) f est définie sur $[0;12]$ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.
 Déduire de la question précédente un système de quatre équations à quatre inconnues vérifié par (a;b;c;d).
- h) En déduire les valeurs de a,b,c et d.

Partie 2

Dans la suite du problème on suppose que f est définie sur $[0;12]$ par $f(x)=4321x^3-241x^2+8$.

- a) Montrer que le milieu I de $[MN]$ appartient à la courbe F_1
- b) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe F_1 au point I.

Partie 3

- a) Dans le but de carreler le fond de la piscine, l’architecte cherche à estimer l’aire A de la surface située à l’intérieur de ce contour.
 On admet que l’aire de la surface délimitée par la courbe F_1 et les segments $[OM],[OP],[PN]$ est égale à l’aire du trapèze OMNP.
 Calculer l’aire A en m^3 (on arrondira au m^3 près).
- b) La profondeur de la piscine sera constante et égale à 1,5m.
 Quel sera, en m^3 , le volume d’eau de la piscine ?

QCM RÉVISION COURS : FONCTIONS DÉRIVÉES

<https://www.maths-cours.fr/qcm/qcm-revision-cours-fonctions-derivees/>