CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2.	• Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.

10.5 Vecteurs et droites (1S)***

S	Progression	Supports
	=> ACTIVITÉ 1 sur feuille 1. PRÉSENTATION DES PUISSANCES A - Définitions B - Propriétés	Ex 1 – 2 – 3 – 8 – 9
	=> ACTIVITÉ 3 sur feuille => ACTIVITÉ 3 sur feuille 2. OPÉRATIONS SUR LES PUISSANCES	Ex 10 – 11 – 14 – 15 – 16 – 19 - 20 – 24 – 26 - 30
	=> ACTIVITÉ 4 sur feuille 3. PUISSANCES DE 10 A - Définition	Ex 31 – 32 – 33 – 34 - 37
	=> ACTIVITÉ 5 sur feuille B - Notation scientifique et ordre de grandeur	Ex 38 – 39 -40

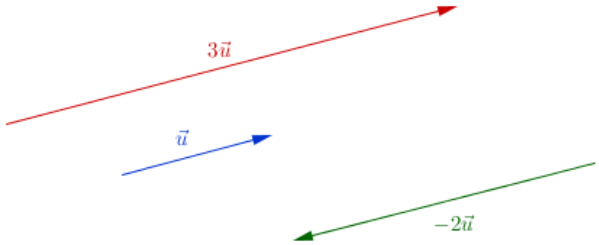
http://www.maths-cours.fr/

CHAPITRE 10 VECTEURS ET DROITES	GÉOMÉTRIE 1ère S

1. Vecteurs et repère cartésien

Définition (Vecteurs colinéaires)

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

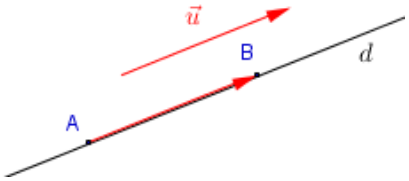


Remarques

- Par convention, on considère que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan
- Deux vecteurs colinéaires ont la même « direction » ; ils ont le même sens si $k>0$ et sont de sens contraire si $k<0$.

Définition

On dit que le vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite d si et seulement si il existe deux points A et B de d tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.



Propriété

Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

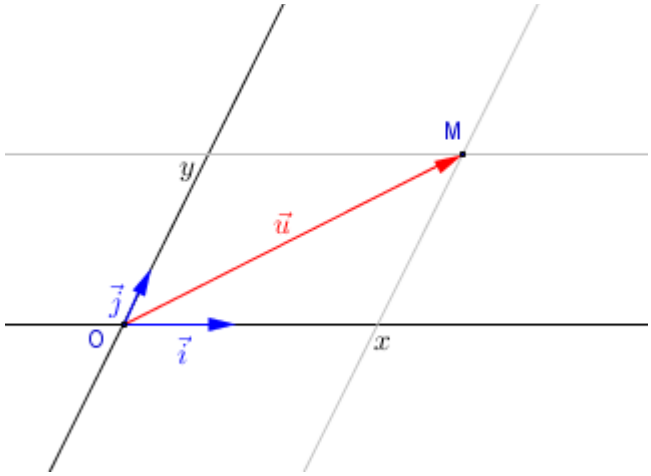
Théorème et définitions

Soient O un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs **non colinéaires** du plan.

Le triplet $(O;\vec{i};\vec{j})$ s'appelle un **repère cartésien** du plan.

- Pour tout point M du plan, il existe deux réels x et y tels que :
$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe deux réels x et y tels que :
$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

Le couple $(x\ ;\ y)$ s'appelle le couple de **coordonnées** du point M (ou du vecteur $\vec{u}$) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



Propriétés

On se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soient deux points $A(x_A;y_A)$ *et* $B(x_B;y_B)$, alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A\ ;\ y_B-y_A)$.
- Le milieu M de [AB] a pour coordonnées $M\left(\frac{x_b+x_a}{2};\frac{y_b+y_a}{2}\right)$

Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles**, c'est à dire si et seulement si :

$$xy'-x'y=0$$

2. Équations de droites

Dans cette partie, on se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (non nécessairement orthonormé).

Théorème

Soit d une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un point M appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Exemple

Soient le point $A(0;1)$ et le vecteur $\vec{u}$ $(1\ ;-1)$.

Le point $M(x;y)$ appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Or les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x\ ;y-1)$ donc :

$M \in d \quad \Leftrightarrow x \times (-1) - (y-1) \times 1 = 0 \quad \Leftrightarrow -x - y + 1 = 0$

Cette dernière égalité s'appelle une équation cartésienne de la droite d.

Théorème

Toute droite du plan possède une *équation cartésienne* du type :

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont trois réels.

Réciproquement, l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est une droite.

Remarques

- Une droite possède une infinité d'équation cartésienne (il suffit de multiplier une équation par un facteur non nul pour obtenir une équation équivalente).

- Si b ≠ 0 l'équation peut s'écrire :

  $ax + by + c = 0$ <=> $by = -ax - c$ <=> $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

  qui est de la forme $y = mx + p$ (en posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$).

  Cette forme est appelée **équation réduite** de la droite.
  Ce cas correspond à une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

- Si b = 0 et a ≠ 0 l'équation peut s'écrire :

  $ax + c = 0$ <=> $x = -\frac{c}{a}$

  qui est du type $x = k$ (en posant $k = -\frac{c}{a}$)

  Ce cas correspond à une droite qui est parallèle à l'axe des ordonnées.

Propriété

Soit d une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b\ ;\ a)$ est un vecteur directeur de la droite d.

Démonstration

Voir exercice ≪ Equation cartésienne - Vecteur directeur ≫.

BARYCENTRES

Complément
Ce chapitre ne figure plus au programme de première.

1. Barycentre de deux points pondérés

Théorème et définition

A et B sont deux points du plan ; α et β sont deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$
Il existe un unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
G s'appelle le **barycentre** du système $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

Remarque
Lorsque $\alpha = \beta$ (on parle alors d'**isobarycentre**), G est le milieu du segment $[AB]$.

Propriété

Pour tout réel $k \neq 0$, le barycentre ne change pas si on multiplie tous les coefficients par k.

Propriété

Si G est le barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, les points A, B et G sont alignés. Réciproquement, si A, B et C sont trois points alignés, il existe 2 nombres α et β avec $\alpha + \beta \neq 0$ tel que C soit barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

Propriété

α et β sont deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Pour tout point M du plan :
$(\alpha + \beta)\, \overrightarrow{MG} = \alpha\, \overrightarrow{MA} + \beta\, \overrightarrow{MB}$

Remarque
La propriété précédente est valable pour **tout** point M. En particulier en faisant $M = A$ on obtient : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Cette formule est très utile pour placer le point G.

2. Barycentre de trois points pondérés

Théorème et définition

A, B et C sont trois points du plan; α, β et γ sont trois réels tels que α + β + γ ≠ 0
Il existe un unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
G s'appelle le **barycentre** du système {$(A;\alpha);(B;\beta),(C;\gamma)$}.

Propriété

Pour tout réel $k \neq 0$, le barycentre ne change pas si on multiplie tous les coefficients par k.

Propriété

α, β et γ sont trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Pour tout point M du plan :

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$$.

Remarque

La propriété précédente est valable pour **tout** point M. En particulier en faisant $M = A$ on obtient : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

Cette formule est utile pour placer le point G.

Théorème

Associativité du barycentre

α, β et γ sont trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$ et soit G le barycentre du système {$(A;\alpha);(B;\beta),(C;\gamma)$}.
Alors G est le barycentre du système {$(G_0 ; \alpha + \beta) ; (C;\gamma)$} où G_0 est le barycentre du système {$(A;\alpha);(B;\beta)$}.

MÉTHODES SUR LES VECTEURS

MÉTHODE 1 **Montrer que deux droites sont parallèles** **Ex. 8 p. 177**

Exercice d'application

On considère quatre points A (1 ; 4) , B (3 ; − 2) , C (− 1 ; − 2) et D (− 2 ; 1) .

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\-2-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\1-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ d'où :

2 × 3 − (− 1) × (− 6) = 6 − 6 = 0.

On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, puis que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

MÉTHODE 2 **Déterminer si des points sont alignés** **Ex. 10 p. 177**

Exercice d'application

On considère trois points A(6 ; − 1) , B (0 ; 1) et C (− 3 ; 2) .

Les trois points A, B et C sont-ils alignés ?

Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ d'où − 6 × 3 − (− 9) × 2 = − 18 + 18 = 0.

On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, puis que les points A, B et C sont alignés.

MÉTHODE 3 **Déterminer une équation cartésienne de droite** **Ex. 27 p. 179**

Exercice d'application

Déterminer une équation cartésienne de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ passant par A (− 1 ; 4) .

Correction

Soit M (x ; y) on a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$. Ainsi :

M ∈ d ⇔ $\overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{u}$ u sont colinéaires

⇔ (x + 1) × 2 − (− 3) × (y − 4) = 0

⇔ 2x + 2 − (− 3y + 12) = 0

⇔ 2x + 3y − 10 = 0.

Une équation cartésienne de d est donc 2x + 3y − 10 = 0.

MÉTHODE 4 **Déterminer un vecteur directeur et un point d'une droite** **Ex. 28 p. 179**

Exercice d'application

On considère la droite d d'équation $x - 3y + 1 = 0$.

Déterminer un vecteur directeur de la droite d.

Déterminer les coordonnées d'un point de d.

Correction

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-(-3)\\1\end{pmatrix}$ soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

On peut fixer une valeur pour une coordonnée et choisir ensuite l'autre pour que l'équation soit vérifiée.

Ainsi, si on fixe $y = 0$ alors $x - 3 \times 0 + 1 = 0$ donc $x = -1$.

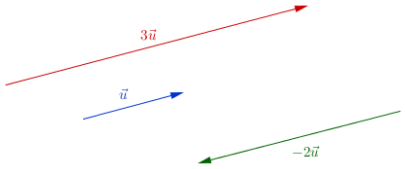
Le point A (− 1 ; 0) est donc un point de d.

L'ESSENTIEL
VECTEURS ET DROITES

1. Vecteurs et repère cartésien

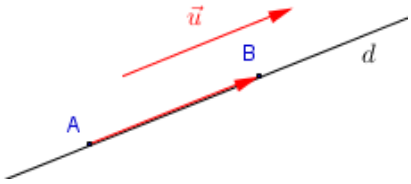
Définition (Vecteurs colinéaires)

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.



Définition

On dit que le vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite d si et seulement si il existe deux points A et B de d tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.



Propriété

Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Théorème et définitions

Soient O un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs **non colinéaires** du plan.

Le triplet $(O;\vec{i};\vec{j})$ s'appelle un **repère cartésien** du plan.

- Pour tout point M du plan, il existe deux réels x et y tels que :
$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe deux réels x et y tels que :
$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

Le couple $(x\ ;\ y)$ s'appelle le couple de **coordonnées** du point M (ou du vecteur $\vec{u}$) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Propriétés

On se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soient deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
- Le milieu M de [AB] a pour coordonnées $M\left(\frac{x_b+x_a}{2};\frac{y_b+y_a}{2}\right)$

Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles**, c'est à dire si et seulement si :

$$xy' - x'y = 0$$

2. Équations de droites

Théorème

Soit d une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un point M appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Théorème

Toute droite du plan possède une *équation cartésienne* du type : $ax + by + c = 0$

où a, b et c sont trois réels.

Réciproquement, l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont trois réels avec a ≠ 0 ou b ≠ 0 est une droite.

Propriété

Soit d une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b ; a)$ est un vecteur directeur de la droite d.

EXERCICES DE SOUTIEN
VECTEURS ET DROITES

Thèmes **Mathenpoche 2ème – G3 : Vecteurs**	**Exercices** **Sesamath 1ère S, p 177+**
1. ACTIVITÉS MENTALES	Ex p177 2 – 3 – 5
2. COLINÉARITÉ ET PARALLÉLISME > Colinéarité de deux vecteurs > - Extrait de cours - Colinéarité applications - Colinéarité et coordonnées x2 - Alignement, milieu - Colinéarité, parallélisme - Colinéarité, alignement	Ex p 177 8m - 10 – 13 – 14 – 19 21 – (22)
3. ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE DROITES	Ex p 179 24 – 27 – 28 31 – 32 – 33 – 37 41 -
4. DÉCOMPOSITION ET REPÈRE > Définition > - Milieu, vecteurs	Ex p181 45 – 46 52 – (53) – 56
5. NORME D'UN VECTEUR > Définition > - Longueur, norme - Vecteurs égaux	Ex p 183 57 – 59 62 – (63) – 64

Équation cartésienne d'une droite – Vecteur directeur

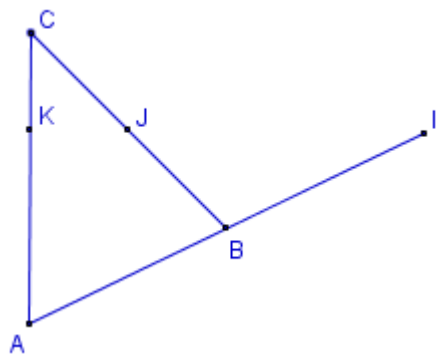
1 Pour chacune des droites dont une équation est donnée ci-dessous, déterminer :

un vecteur directeur
l'équation réduite
le coefficient directeur

a) $x - y + 1 = 0$
b) $x + 2y = 0$
c) $4x - 2y + 5 = 0$
d) $3y + 1 = 0$
e) $-x + 1 = 0$

Vecteurs et alignement

2 Soient un triangle ABC, I le symétrique de A par rapport à B, J le milieu de [BC] et K le point tel que



$\vec{AK} = \frac{2}{3}\vec{AC}$

Montrer que les points I, J et K sont alignés. (On pourra se placer dans un repère judicieusement choisi)

Équation cartésienne – Vecteur directeur

3 Si d une droite d'équation $ax + by + c = 0$, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b\ ;a)$ est un vecteur directeur de la droite d.

Dans le plan, muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ et $A(x_A;y_A)$ un point de d.

1. Montrer que le point B de coordonnées $(x_A - b\ ;\ y_A + a)$ appartient à la droite d.
2. En déduire que le vecteur $\vec{u}\ (-b;a)$ est un vecteur directeur de d.

Le point A appartient à la droite d donc ses coordonnées vérifient l'équation de d, c'est à dire que $axA+byA+c=0$
Posons $xB=xA-b$ et $yB=yA+a$. Alors :
$axB+byB+c=a(xA-b)+b(yA+a)+c=axA-ab+byA+ab+c=axA+byA+c=0$
Par conséquent le point B appartient également à la droite d.

Comme A et B appartiennent à la droite d, le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de d.
Or les coordonnées de $\vec{AB}$ sont $(xB-xA;yB-yA)=(-b;a)$, ce qui prouve le résultat demandé.

Médianes – Centre de gravité

4 On se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soient les points A(1;1), B(4;2) et C(2;4)

1. Déterminer les coordonnées du point M milieu de [BC]. En déduire une équation de la médiane au triangle ABC issue de A.
2. Déterminer une équation de la médiane au triangle ABC issue de B.
3. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
4. Vérifier que $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AM}$

Les coordonnées de M sont $(2xB+xC;2yB+yC)=(3;3)$
La médiane au triangle ABC issue de A est la droite (AM).
Le point P(x;y) appartient à la droite (AM) si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AP}$ sont colinéaires.
$\vec{AP}$ a pour coordonnées $(x-xA;y-yA)=(x-1;y-1)$
$\vec{AM}$ a pour coordonnées $(xM-xA;yM-yA)=(2;2)$
Les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AP}$ sont colinéaires si et seulement si (voir théorème) :
$(x-1)\times 2-(y-1)\times 2=0$
$2x-2y=0$
Une équation de la médiane au triangle ABC issue de A est donc $2x-2y=0$ ou après simplification par 2 :
$x-y=0$
Le raisonnement étant identique, il ne sera pas détaillé.
N(23;25)
$\vec{BP}$ a pour coordonnées $(x-4;y-2)$
$\vec{BN}$ a pour coordonnées $(xM-xA;yM-yA)=(-25;21)$
Une équation de (BN) est :

$(x-4)\times 21-(y-2)\times -25=0$
$x+5y-14=0$ (après multiplication par 2)

Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection de ses médianes.
Le couple de coordonnées du point G est donc la solution du système :
$\{x-y=0x+5y-14=0 \Leftrightarrow \{x=y6y-14=0 \Leftrightarrow \{x=y$
$y=7/3 \Leftrightarrow \{x=7/3y=7/3$
Les coordonnées de G sont donc (37;37)

$\vec{AG}$ a pour coordonnées $(xG-xA;yG-yA)=(34;34)$
$\vec{AM}$ a pour coordonnées (2;2)
On a donc bien $\vec{AG}=32\vec{AM}$
Remarque : On retrouve dans cette question un résultat vu au collège. Si l'exercice demandait seulement de trouver les coordonnées de G, il était bien sûr plus facile de partir de cette égalité vectorielle que de déterminer l'équation des médianes.

Activités mentales

5 Déterminer une équation de la droite d passant par A (0 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

6 Déterminer un vecteur directeur de la droite d d'équation y − 3x = 4.

7 Donner l'équation réduite des droites suivantes.

1. d d'équation x − y + 2 = 0
2. d d'équation 6x + 2y = 1

8 On considère la droite d d'équation cartésienne − 2x + 3y − 4 = 0.

1. Le point A (− 1 ; 2) appartient-il à la droite d ?
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d avec l'axe des abscisses.