MANUEL LIBRE

MATHS 1re S

STATISTIQUES PROBABILITÉS

ANALYSE

GÉOMÉTRIE

Environnement numérique et relectures réalisés par l'association Sésamath

MAGNARD

SOMMAIRE

ANALYSE

Cette partie propose de travailler hors chapitre afin de stimuler l'activité de recherche des élèves sans être biaisée par un titre en pied de page ou autre. les exercices proposés sont des problèmes ouverts, des problèmes de synthèse.

GÉOMÉTRIE PLANE

STATISTIQUES – PROBABILITÉS

LOGOS ET INDICATIONS

19	Exercice corrigés en fin de manuel
INFO	Exercice avec l'ordinateur
CALC	Exercice avec la calculatrice
ALGO	Exercice d'algorithmique

TRAVAILLER UN CHAPITRE

Manuel et **manuel numérique**, deux outils complémentaires

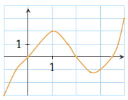
1 VÉRIFIER SES PRÉREQUIS

1 Réalisez le **test de début** de chapitre.

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1

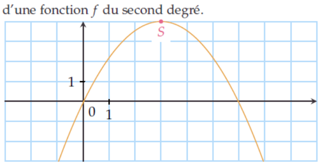


1) a) Donner l'ensemble de définition de f.
b) Déterminer $f(-0,5)$.
c) Donner le(s) antécédent(s) de -1 par f.
2) Dresser le tableau de variations de f.
3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
4) Dresser le tableau de signes de f.

2 Développer les expressions suivantes.
1) $(x-2)^2$
2) $-2(5-3x)^2$
3) $3(2x-1)(4+x)$
4) $xy(x^2+3y^2)$

3 Factoriser, puis étudier le signe des expressions suivantes.
1) $(x-3)(2-3x)-(x-1)(x-3)$
2) x^2-3x
3) $9-4x^2$
4) $x^2+8x+16$

4 On considère la courbe représentative ci-contre d'une fonction f du second degré.



Parmi les expressions suivantes, laquelle est celle de la fonction f ?
1) $-\frac{1}{2}(x+3)^2+4$
2) $-\frac{1}{2}(x-3)^2+4$
3) $\frac{1}{2}(x+3)^2+4$
4) $\frac{1}{2}(x+3)^3+4$

5 Parmi ces expressions, lesquelles sont égales quel que soit x réel ?
1) x^2-8x+7
2) $(x-4)^2-9$
3) $(x-2)(x-3)$
4) $(x-7)(x-1)$

6 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.
... $(x+3)(2x-1)=0$

Voir solutions p. 27

2 Vérifiez vos **réponses** en fin de manuel.

Chapitre A1
Second degré
Auto-évaluation
1 1) a) $D_f = [-1\,;4]$
b) $f(-0,5) = -1$
c) Les antécédents de -1 par f sont $-0,5$, 2,5 et 3.

x	-1	1	2,75	4
$f(x)$	-3 ↗	2 ↘	-1 ↗	3

2) L'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0, 2 et 3,5.

3 Remédiez à vos difficultés grâce aux **exercices et aides** du manuel numérique.

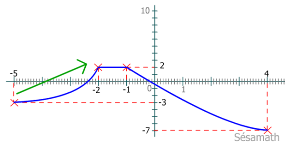
Construire un tableau

Un tableau de variations est un tableau qui résume les variations d'une fonction.
Il est composé de deux lignes :
– la première donne des valeurs de l'ensemble de définition de la fonction
– la deuxième donne les variations de la fonction.

x	
$g(x)$	

PLAN

Lorsqu'on lit la courbe de gauche à droite, la fonction semble strictement croissante



2 APPRENDRE UNE LEÇON

1 Apprenez les **définitions** et les **propriétés**.

2 Refaites les exercices corrigés des **méthodes** du cours.

Renvoi

MÉTHODE 1 Déterminer la forme canonique par le calcul

► Ex. 11 p. 14

Exercice d'application

Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2+3x-1$.
Déterminer sa forme canonique.

Correction

La forme développée de f a pour coefficients $a=-1$, $b=3$ et $c=-1$.

On obtient $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$ et $\beta = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3\times 3}{2} - 1 = \frac{5}{4}$.

3 Faites l'**exercice d'entraînement** lié à la méthode.

11 ► MÉTHODE 1 p. 13

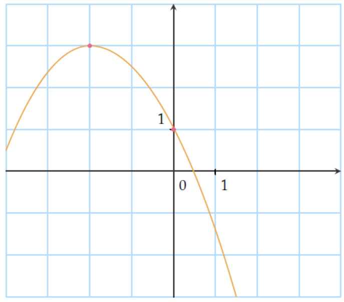
Mettre sous forme canonique les polynômes du second degré suivants.
1) x^2+4x+1
2) $4x^2-3$
3) $-2x^2+3x-6$
4) x^2+6x

4 Vérifiez vos **réponses** en fin de manuel ou suivez le raisonnement à l'aide du **corrigé pas à pas** du manuel numérique.

Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+4x+1$.
1) La forme développée de f a pour coefficient $a=1$, $b=4$ et $c=1$.
On obtient $\alpha = -\frac{b}{2a} = -2$ et $\beta = f(-2) = 4-4\times 2+1 = -3$.
La forme canonique de f est donc $f(x) = (x+2)^2 - 3$.

3 S'ENTRAÎNER AVEC DES EXERCICES

1. Repérez les éléments importants de la consigne, comme les verbes d'action à l'infinitif.



16 ▶ MÉTHODE 2 p. 6

1) Expliquer pourquoi la forme canonique de f peut s'écrire :

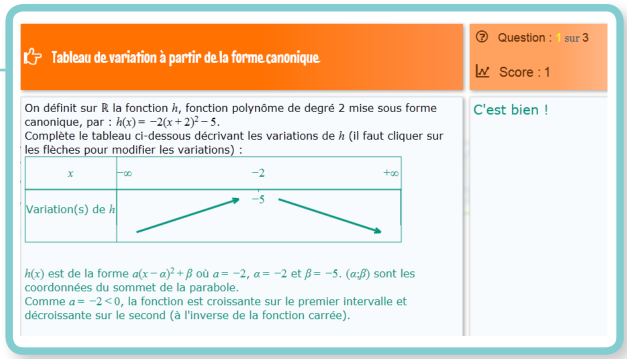
$$f(x) = a(x+2)^2 + 3.$$

2) En utilisant l'image de 0, déterminer a et en déduire la forme canonique de f.

2. Vérifiez votre compréhension du vocabulaire.
→ utilisez le lexique à la fin du manuel ou sur le manuel numérique.

3. Réalisez un schéma si nécessaire.

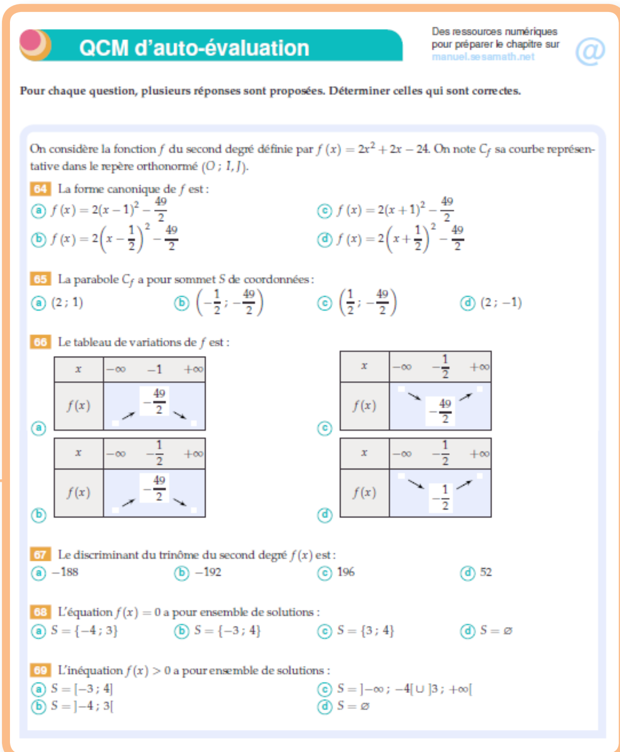
4. Réalisez les parcours pédagogiques personnalisés (J3P) pour vous entraîner de façon adaptée et éventuellement approfondir les notions étudiées.



4 PRÉPARER UN CONTRÔLE

1. Faites les exercices d'Activités mentales.
Sans difficultés calculatoires, ils permettent de vérifier que les raisonnements sont compris.

2. Réalisez le QCM de fin de chapitre
▶ vérifiez vos réponses en fin de manuel ;
▶ refaites les compléments proposés dans le manuel numérique.



QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On considère la fonction f du second degré définie par $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$. On note C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\,;\, I, J)$.

64 La forme canonique de f est :
ⓐ $f(x) = 2(x-1)^2 - \frac{49}{2}$
ⓑ $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{2}$
ⓒ $f(x) = 2(x+1)^2 - \frac{49}{2}$
ⓓ $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{2}$

65 La parabole C_f a pour sommet S de coordonnées :
ⓐ $(2\,;\,1)$ ⓑ $\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{49}{2}\right)$ ⓒ $\left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{49}{2}\right)$ ⓓ $(2\,;\,-1)$

66 Le tableau de variations de f est :

ⓐ

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	$-\frac{49}{2}$	↘

ⓑ

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$-\frac{49}{2}$	↘

ⓒ

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{49}{2}$	↗

ⓓ

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗

67 Le discriminant du trinôme du second degré $f(x)$ est :
ⓐ -188 ⓑ -192 ⓒ 196 ⓓ 52

68 L'équation $f(x) = 0$ a pour ensemble de solutions :
ⓐ $S = \{-4\,;\,3\}$ ⓑ $S = \{-3\,;\,4\}$ ⓒ $S = \{3\,;\,4\}$ ⓓ $S = \varnothing$

69 L'inéquation $f(x) > 0$ a pour ensemble de solutions :
ⓐ $S = [-3\,;\,4]$
ⓑ $S =]-4\,;\,3[$
ⓒ $S =]-\infty\,;\,-4[\cup]3\,;\,+\infty[$
ⓓ $S = \varnothing$

MÉTHODES DE L'ANNÉE

Analyse

Géométrie

Statistique et probabilités

ANALYSE

1

Second degré

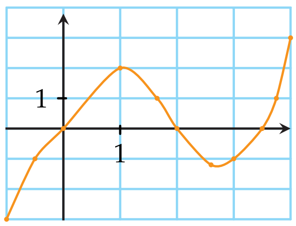
Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Lire un graphique
- Étudier le signe d'une expression
- Étudier le sens de variations d'une fonction
- Développer et factoriser une expression
- Résoudre une équation

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1



1) a) Déterminer $f(-0,5)$.

b) Donner le(s) antécédent(s) de -1 par f.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

4) Dresser le tableau de signes de f.

2 Développer les expressions suivantes.

1) $(x-2)^2$

2) $-2(5-3x)^2$

3) $3(2x-1)(4+x)$

4) $xy\left(x^2+3y^2\right)$

3 Factoriser, puis étudier le signe des expressions suivantes.

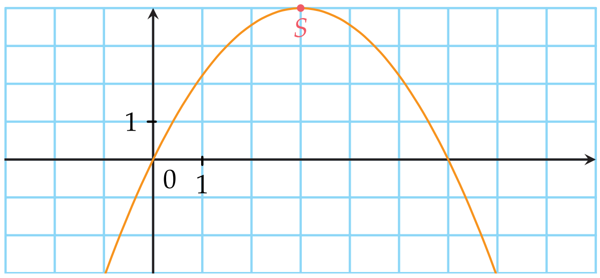
1) $(x-3)(2-3x)-(x-1)(x-3)$

2) x^2-3x

3) $9-4x^2$

4) $x^2+8x+16$

4 On considère la courbe représentative ci-dessous d'une fonction f du second degré.



1) Le point $A(1\,;\,2)$ appartient-il à la courbe ?

2) Quelles sont les coordonnées de S ?

3) 5 est-il solution de l'équation $f(x) = 2$?

4) 3 est-il solution de l'inéquation $f(x) < 4$?

5 Parmi ces expressions, lesquelles sont égales quel que soit x réel ?

1) x^2-8x+7

2) $(x-4)^2-9$

3) $(x-2)(x-3)$

4) $(x-7)(x-1)$

6 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $2x^2+3=0$

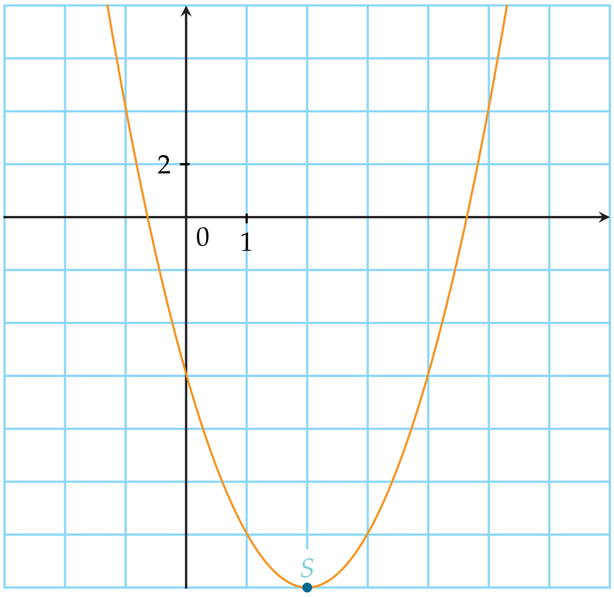
2) $(x+3)(2x-1)=0$

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Cette courbe tient une sacrée forme !

Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x - 6$.



1) Lecture graphique

a) Lire les coordonnées du sommet de la parabole C_f.

b) La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, appelée forme canonique de la fonction f et cette écriture est unique.
Que valent α et β ?

c) En remarquant que $f(5) = 4$, on peut écrire que $a(5-\alpha)^2 + \beta = 4$.
En déduire a, puis la forme canonique de f.

2) Sans utiliser la courbe représentative de la fonction f, on peut mener le raisonnement suivant pour déterminer la forme canonique.

a) Trouver le nombre réel d tel que $2x^2 - 8x - 6 = 2\left(x^2 - 4x - d\right)$.

b) En développant $(x-2)^2$, déterminer e tel que $x^2 - 4x - d = (x-2)^2 + e$.

c) En déduire la forme canonique de f.

3) Reprendre la démarche précédente pour déterminer la forme canonique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^2 + 8x + 10.$$

4) Dans le cas général, une fonction f du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0.$$

a) Développer $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

b) En déduire que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + d$ où d est un nombre réel que l'on déterminera.

c) On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Calculer $f(\alpha)$.

d) Conclure sur la forme canonique de f.

ACTIVITÉ 2 Prévision du bénéfice d'une entreprise

INFO CALC

Alarmé par sa banque à propos de la mauvaise situation financière, le chef d'entreprise demande au comptable de faire une prévision sur le bénéfice des années suivantes. Le comptable dispose des données suivantes.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Bénéfice (en dizaine de milliers d'euros)	-20	$-8,5$	-5	$-1,64$	0,99	4,21	5	4,04	1,58

Partie 1 : Modélisation par une fonction du second degré

Le comptable décide de modéliser cette évolution par une fonction du second degré.
Une fonction du second degré définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est entièrement déterminée par la donnée des coefficients a, b et c.
On peut par exemple effectuer le choix de ne garder que les données des années 0, 6 et 8.

1) Montrer que cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} c = -20 \\ a \times 6^2 + b \times 6 = 25 \\ a \times 8^2 + b \times 8 = 21,58 \end{cases}$$

2) Vérifier que le système précédent donne l'expression $f_1(x) = -0,73x^2 + 8,55x - 20$ en arrondissant les coefficients à 0,01 près.
On pourra utiliser un logiciel de calcul formel.

3) Calculer la prévision du bénéfice pour 2015, puis pour 2020.

4) Préciser l'intervalle $[x_1\,;\,x_2]$ dans lequel le bénéfice de l'entreprise $f_1(x)$ est positif (arrondir x_1 et x_2 à 0,1 près).
Après 5 années de bénéfice positif, le bénéfice de l'entreprise reste-t-il positif en 2015 ?

Partie 2 : Avec le tableur ou la calculatrice

1) Entrer les données comme sur la figure ci-dessus.

2) Afficher les points correspondants. Suivant le tableur utilisé, le type de diagramme est XY dispersion ou Nuage de points.

3) Insérer une courbe de tendance polynomiale degré 2 et faire afficher l'équation.
Quelle est l'équation de la courbe $y = f_2(x)$ affichée par le tableur ? Arrondir les coefficients à 0,01 près.

4) Calculer la prévision du bénéfice avec cette fonction f_2 en 2015, puis en 2020.

	A	B	C
1		année	Bénéfice
2	2006	0	-20
3	2007	1	-8,5
4	2008	2	-5
5	2009	3	-1,64
6	2010	4	0,99
7	2011	5	4,21
8	2012	6	5
9	2013	7	4,04
10	2014	8	1,58
11			

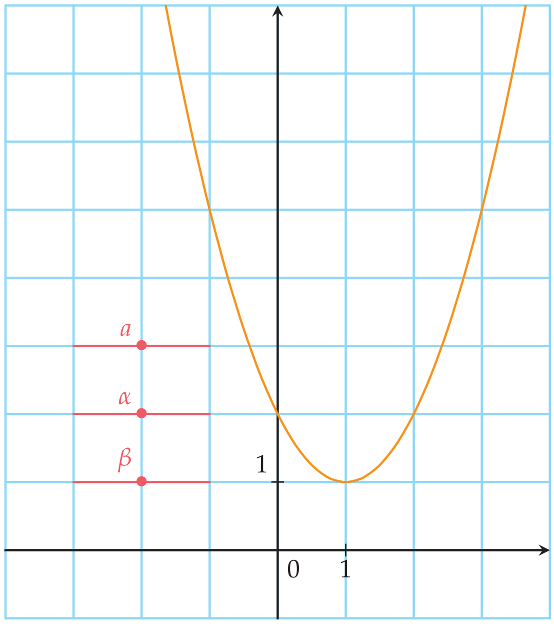
Activités d'approche

ACTIVITÉ 3 Combien de solutions ?

INFO

Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Partie 1 : Expérimentation



1) Avec un logiciel de géométrie, créer trois variables réelles a, α et β compris entre -5 et 5 avec un pas de 0,1.

2) Fixer $a = 1$. Faire varier α et β.
Du quel de ces deux paramètres dépend le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
Préciser les observations effectuées.

3) Fixer $\beta = 1$. Faire varier a et α.
Du quel de ces deux paramètres dépend le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
Préciser les observations effectuées.

4) Fixer $\beta = 0$.
Combien l'équation a-t-elle de solutions ?

Partie 2 : Synthèse des observations

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui donne le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ selon les valeurs de a et β.

	$a > 0$	$a < 0$
$\beta = 0$		
$\beta > 0$		
$\beta < 0$		

2) Compléter les propositions ci-dessous.
Si $\beta = 0$, alors l'équation a … solution(s).
Si a et β sont de même signe, l'équation a … solution(s).
Si a et β sont de signe contraire, l'équation a … solution(s).

Partie 3 : Démonstration

En fait, résoudre l'équation revient à résoudre $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$.

1) Résoudre cette équation si $\beta = 0$.

2) Si $\beta \neq 0$, montrer que le nombre de solutions dépend du nombre $\dfrac{\beta}{a}$.

3) En quoi cela rejoint-il la synthèse effectuée **partie B. 2)** ?

Dans ce chapitre, on munit le plan du repère orthogonal $(O\,;I,J)$.

1. Fonction polynôme du second degré

A. Généralités

DÉFINITION

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ est appelée **fonction polynôme du second degré** ou, simplement, fonction du second degré.

Exemples Parmi les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

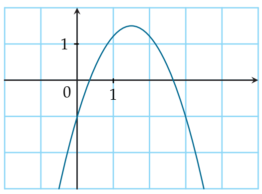
- $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$ est l'expression d'une fonction polynôme du second degré avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$;
- $f_2(x) = \frac{1}{2}x - 2$ n'est pas l'expression d'une fonction du second degré, c'est une fonction affine ;
- $f_3(x) = x^3 - x^2 + 3x - 6$ n'est pas l'expression d'une fonction du second degré, c'est une fonction de degré 3.

VOCABULAIRE :

- L'expression algébrique $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$, est appelée **trinôme du second degré** et l'écriture $f(x) = ax^2 + bx = c$ est appelée **forme développée** de f.
- La courbe représentative d'une fonction du second degré est appelée une **parabole**.

REMARQUE : On remarque que $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Le coefficient c s'interprète donc graphiquement comme l'ordonnée du point d'intersection de la courbe C_f et de l'axe des ordonnées.

Exemple La courbe C_f représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,-1)$.



B. Forme canonique

THÉORÈME

Toute fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$. Cette forme est appelée la **forme canonique**. La courbe représentative de f est une **parabole** de sommet $S(\alpha;\beta)$.
L'équation de la parabole est $y = ax^2 + bx + c$.

Cours - Méthodes

PREUVE

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{(2a)^2}\right)+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

On peut réécrire cette expression sous la forme $f(x) = ax^2+bx+c$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ donc $f(x) = ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$.
Alors $f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2+\beta$. Par conséquent, on obtient $f(\alpha) = \beta$.

MÉTHODE 1 Déterminer la forme canonique par le calcul

► Ex. 12 p. 20

Exercice d'application

Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2+3x-1$.
Déterminer sa forme canonique.

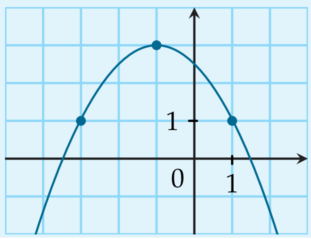
Correction

La forme développée de f a pour coefficients $a=-1$, $b=3$ et $c=-1$.
On obtient $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}$ et $\beta = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3\times 3}{2}-1 = \dfrac{5}{4}$.
La forme canonique de f est donc $f(x) = -\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$ et la courbe représentative de f est donc une parabole de sommet $S\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{5}{4}\right)$.

MÉTHODE 2 Déterminer la forme canonique graphiquement

► Ex. 17 p. 21

On considère la parabole P donnée ci-contre.
Pour déterminer son équation :
1) on lit les coordonnées du sommet $S(\alpha\,;\,\beta)$;
2) on utilise un autre point pour déterminer le coefficient a.



Exercice d'application

Obtenir la forme canonique correspondant à la parabole ci-dessus.

Correction

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(-1\,;\,3)$.
La forme canonique s'écrit $y = a(x-(-1))^2+3 = a(x+1)^2+3$. Pour trouver a, on utilise les coordonnées d'un point de la courbe différent du sommet, par exemple $(-3\,;\,1)$. L'équation précédente permet d'obtenir $a(-3+1)^2+3 = 1$ puis $a(-2)^2 = -2$ soit $4a = -2$ et enfin $a = -\dfrac{1}{2}$. En conclusion, $y = -\dfrac{1}{2}(x+1)^2+3$.

REMARQUE : On peut également obtenir la forme canonique dans des cas simples en reprenant la démarche de la preuve du théorème précédent.
Considérons l'exemple $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$.
On écrit $f(x) = 2x^2 - 4x + 8 = 2(x^2 - 2x + 4) = 2((x-1)^2 - 1 + 4) = 2((x-1)^2 + 3)$ et on obtient finalement $f(x) = 2(x-2)^2 + 6$.
En dehors de ces cas simples, cette démarche peut conduire à des calculs compliqués.

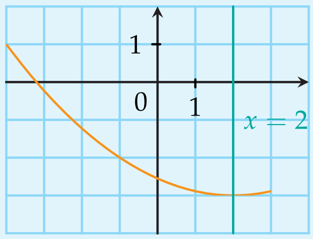
PROPRIÉTÉ

Une parabole de sommet $S(\alpha\ ;\ \beta)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.

MÉTHODE 3 Utiliser la symétrie de la parabole

► Ex. 19 p. 21

La symétrie de la parabole par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$ implique que deux points symétriques par rapport à cet axe ont même ordonnée. La moyenne des abscisses de ces deux points est égale à α.



Exercice d'application

Soit f une fonction du second degré tel que $f(-1) = -2$ et le minimum de f vaut -3 pour $x = 2$.
Que vaut $f(5)$?

Correction

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(2\ ;\ -3)$ donc l'axe de symétrie de la parabole C_f est la droite d'équation $x = 2$. Soit x' l'abscisse du point de la parabole symétrique du point d'abscisse -1 par la symétrie d'axe d'équation $x = 2$.
On a $\dfrac{x' + (-1)}{2} = 2$, soit $x' = 5$. Donc $f(5) = f(-1) = 2$.

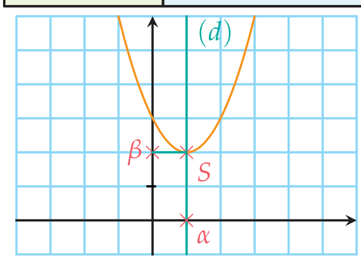
C. Sens de variation

Soit f une fonction du second degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Le sens de variation de f dépend du signe de a.

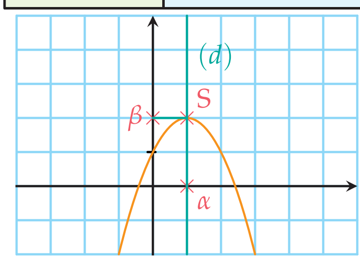
$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
variations de f	↘	β	↗



$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
variations de f	↗	β	↘



PREUVE **cas $a > 0$:** La forme canonique de la fonction f est un enchaînement de fonctions :

$$x \xrightarrow{\text{soustraire } \alpha} x - \alpha \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}} (x-\alpha)^2 \xrightarrow[\text{par } a]{\text{multiplier}} a(x-\alpha)^2 \xrightarrow{\text{ajouter } \beta} a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\alpha]$

Soit u et v deux nombres tels que $u < v \leq \alpha$

$u - \alpha < v - \alpha \leq 0$

$(u-\alpha)^2 > (v-\alpha)^2 \geq 0$

car la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$.

$a \times (u-\alpha)^2 > a \times (v-\alpha)^2 > 0$ car $a > 0$

$a \times (u-\alpha)^2 + \beta > a \times (v-\alpha)^2 + \beta > \beta$

$f(u) > f(v) > \beta$

Conclusion : La fonction f change l'ordre, donc f est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha[$.

Sur l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty[$

Soit u et v deux nombres tels que

$\alpha \leq u < v$

$0 \leq u - \alpha < v - \alpha$

$0 \leq (u-\alpha)^2 < (v-\alpha)^2$

car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

$0 < a \times (u-\alpha)^2 < a \times (v-\alpha)^2$car $a > 0$

$\beta < a \times (u-\alpha)^2 + \beta < a \times (v-\alpha)^2 + \beta$

$\beta < f(u) < f(v)$

Conclusion : La fonction f conserve l'ordre, donc f est croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

De plus $f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2 + \beta = \beta$.

MÉTHODE 4 Étudier les variations d'une fonction du second degré

► Ex. 21 p. 21

Pour étudier les variations d'une fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$

1) calculer les coefficients α et β de la forme canonique ;
2) suivant le signe de a, on déduit le tableau de variations.

Exercice d'application

Étudier les variations de la fonction du second degré définie par $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

Correction $a = -2$, $b = 3$ et $c = -1$ donc $\alpha = -\dfrac{3}{2 \times (-2)} = \dfrac{3}{4}$ et

$\beta = f\left(\dfrac{3}{4}\right) = (-2) \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + 3 \times \dfrac{3}{4} - 1$ soit $\beta = \dfrac{(-2)\times 9}{16} + \dfrac{9}{16} - 1 = \dfrac{-18+9-16}{16} = -\dfrac{25}{16}$.

La forme canonique de f est $f(x) = -2\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{25}{16}$.

De plus, le coefficient a est de signe négatif, donc on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
f	↗	$-\frac{25}{16}$	↘

Vocabulaire :

- Si $a > 0$, f admet un minimum en $x = \alpha$ égal à β que l'on peut traduire par « le sommet de la parabole est en bas » ou par « f est convexe ».
- Si $a < 0$, f admet un maximum en $x = \alpha$ égal à β. On peut dire que « le sommet de la parabole est en haut » ou que « f est concave ».

2. Équation $ax^2 + bx + c = 0$

DÉFINITION : Équation du second degré

Une **équation du second degré** est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels et $a \neq 0$.

DÉFINITION : Discriminant

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** du **trinôme du second degré** $ax^2 + bx + c$.

VOCABULAIRE :

- On appelle **racines** du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- Les solutions de l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées racines ou zéros de la fonction f.

THÉORÈME

Le nombre de solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$	a deux solutions x_1 et x_2 : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	a une solution $x_0 = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$	n'a pas de solution réelle
La courbe représentative C_f	coupe l'axe des abscisses en deux points $(x_1\ ;\ 0)$ et $(x_2\ ;\ 0)$	coupe l'axe des ordonnées en son sommet $(x_0\ ;\ 0)$	ne coupe pas l'axe des abscisses
Forme factorisée de f	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	pas de factorisation dans $\mathbb{R}$

PREUVE L'expression $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ (vu en } \mathbf{1.B}\text{)},$$

soit $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = 0$.

Or $a \neq 0$ donc cela revient à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

Le nombre a^2 étant strictement positif, on en déduit que $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ a le même signe que Δ. Le nombre de solutions de l'équation dépend donc uniquement du signe du discriminant.

PREUVE (suite)

1^er^ cas : $\Delta > 0$

L'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

est de la forme $X^2 = A$ avec $A > 0$ dont les solutions sont $X = \sqrt{A}$ et $X = -\sqrt{A}$.
En notant les deux solutions correspondantes x_1 et x_2, on obtient :
$x_1 + \dfrac{b}{2a} = -\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$ et $x_2 + \dfrac{b}{2a} = \sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$ soit $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
L'expression $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

grâce à l'identité remarquable $A^2 - B^2$ car $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2 \quad (\Delta > 0)$.

2^e^ cas : $\Delta = 0$

L'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

a une unique solution x_0 telle que, $x_0 + \dfrac{b}{2a} = 0$ c'est-à-dire $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \alpha$. Cela correspond au cas où la forme canonique de f est telle que $\beta = 0$, c'est-à-dire $f(x) = a(x-\alpha)^2$ qui est une forme factorisée.

3^e^ cas : $\Delta < 0$

L'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

n'a pas de solution pour $x \in \mathbb{R}$ car quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ et $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$.

MÉTHODE 5 Résoudre une équation du second degré

► Ex. 30 p. 22

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans $\mathbb{R}$:
1) on lit les coefficients a, b et c ;
2) on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$;
3) suivant le signe du discriminant, on en déduit les solutions de l'équation si elles existent.

Exercice d'application

Résoudre l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Correction

On a $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$.
Il faut d'abord calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$.
Le discriminant est strictement positif donc l'équation a deux solutions notées x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2} = 1.$$

Les deux solutions obtenues sont 1 et $\dfrac{1}{2}$.

REMARQUES :

- Si c est nul dans la forme développée, il est inutile de calculer Δ car on peut factoriser $ax^2 + bx = x\,(ax + b)$.
  On résout une équation produit nul, l'équation a deux solutions : 0 et $-\dfrac{b}{a}$.
- Si a et c sont de signe contraire et non nuls, alors l'expression $-4ac$ est de signe strictement positif et donc $\Delta > 0$ et l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a donc deux solutions.

En effet, si on considère l'équation du second degré $\dfrac{1}{3}x^2 - 2x - \dfrac{2}{3} = 0$, on a $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -2$ et $c = -\dfrac{2}{3}$. Cette équation a deux solutions car $\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{2}{3}$ sont de signe contraire.

3. Inéquation du second degré

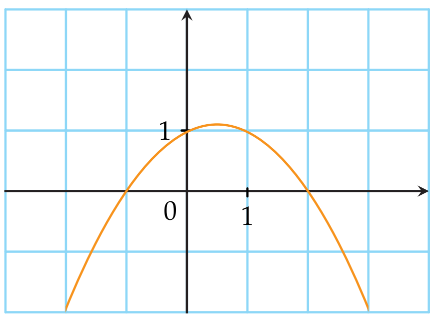
A. Définition

DÉFINITION

Une **inéquation du second degré** est une inéquation du type $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

REMARQUE : Soit f la fonction du second degré définie par $f\,(x) = ax^2 + bx + c$.
Résoudre une inéquation du second degré revient donc à étudier la position de la courbe représentative C_f par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple On veut résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ dans $\mathbb{R}$.
Soit f la fonction du second degré définie par $f\,(x) = -2x^2 + 2x + 4$.
Lorsque l'on dispose de la courbe représentative de la fonction f ci-dessous, on peut en déduire le tableau de signes. La fonction f étudiée ici est concave ($a < 0$).

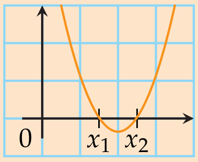


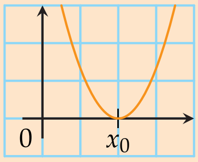
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

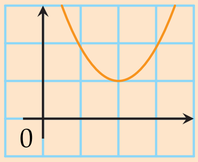
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [-1\,;\,2]$.

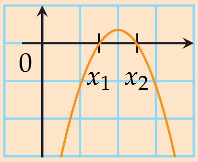
B. Signe d'un trinôme

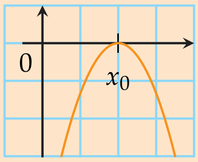
PROPRIÉTÉ : Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

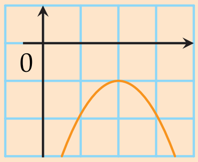
<table>
<tr><th></th><th>$\Delta > 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta < 0$</th></tr>
<tr>
<td>Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$
$a > 0$</td>
<td>
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$ 0 - 0 $+$</td></tr></table>


</td>
<td>
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$ 0 $+$</td></tr></table>


</td>
<td>
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$</td></tr></table>


</td>
</tr>
<tr>
<td>Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$
$a < 0$</td>
<td>
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$ 0 $+$ 0 $-$</td></tr></table>


</td>
<td>
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$ 0 $-$</td></tr></table>


</td>
<td>
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td></tr></table>


</td>
</tr>
</table>

REMARQUE : Pour déterminer le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$, il faut d'abord chercher ses racines. Le signe du trinôme dépend :

- du signe du discriminant : la courbe C_f coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
- du signe de a : le sommet est-il en haut ou en bas de la courbe ?

MÉTHODE 6 Résoudre une inéquation du second degré

► Ex. 51 p. 25

Exercice d'application

Résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x + 1 > 0$ dans $\mathbb{R}$.

Correction

Étape 1 : on résout l'équation du second degré $2x^2 - 3x + 1 = 0$ (voir Méthode 1).

L'équation a deux solutions notées $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.

Étape 2 : on réalise le tableau de signes du trinôme $2x^2 - 3x + 1$.

$a = 2$ donc $a > 0$, on en déduit d'après la propriété en **3.B**) que le signe du trinôme est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $2x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Étape 3 : on conclut sur l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$S = \left]-\infty\,;\, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1\,;\, +\infty\right[.$$

Activités mentales

1 Les fonctions suivantes sont-elles du second degré ?
Si oui, préciser a, b et c les coefficients du trinôme.

1) $f_1(x) = 2x^2 + 3$
2) $f_2(x) = 2x^3 + 3x$
3) $f_3(x) = \dfrac{-x^2 + 4x + 2}{3}$
4) $f_4(x) = \dfrac{1}{2} + x^2 - 4x$

2 Les courbes correspondant aux équations suivantes sont-elles des paraboles ?

1) $y = 2x - 1$
2) $y = 2x^2 - 1$
3) $y = \dfrac{1}{x}$
4) $y^2 = x^2$

3 Compléter dans chaque cas.

1) $x^2 - 6x + 9 = (x - ...)^2$ donc $x^2 - 6x = (x - ...)^2 - ...$
2) $x^2 + 4x + 4 = (x + ...)^2$ donc $x^2 + 4x = (x + ...)^2 - 4$
3) $x^2 + 2x = (x + ...)^2 - ...$
4) $x^2 - 2x = (x - ...)^2 - ...$

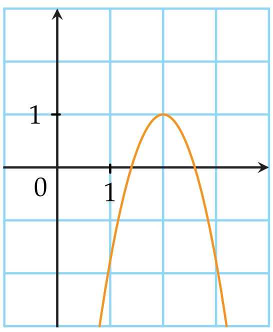
4 Les expressions suivantes peuvent-elles être la forme canonique d'une fonction f du second degré ? Si oui préciser a, α et β.

1) $f_1(x) = x^2 + 3$
2) $f_2(x) = (x - 1) + 2$
3) $f_3(x) = \left(x + \sqrt{5}\right)^2$
4) $f_4(x) = (x + 1)^2 - (x - 2)^2$

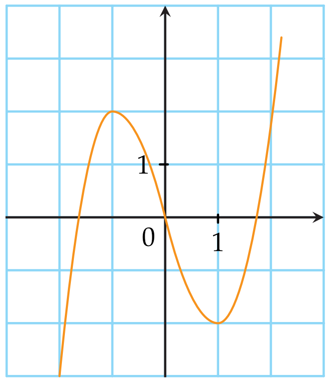
5 **Sommet de la parabole**

La courbe est-elle une parabole d'équation $y = f(x)$? Si oui, lire les coordonnées du sommet et le signe de a.

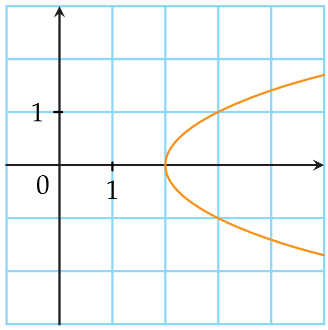
1)



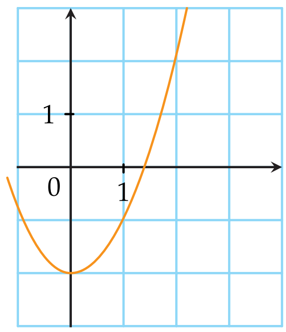
2)



3)



4)



6

1) Résoudre l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$.
2) Réaliser le tableau de signes du trinôme $x^2 - 3x + 2$.
3) Résoudre l'inéquation $x^2 - 3x + 2 > 0$.

7 Dans chacun des cas suivants, le nombre a est-il solution de l'équation ?

1) $a = 1$	$2x - 1 = 0$
2) $a = 2$	$2x^2 + 2x - 6 = 0$
3) $a = 0$	$x^2 - 2x = 0$
4) $a = -1$	$2x^2 + x - 1 = 0$
5) $a = 3$	$(2x - 6)(x - 1) = 0$
6) $a = -2$	$-2x^2 - 1 = 0$

S'entraîner

8 Dans chacun des cas suivants, quel est le nombre de solutions de l'équation ?

1) $3x^2 + x - 2 = 0$
2) $3x^2 + 2 = 0$
3) $x^2 - x = 0$
4) $2(x-1)^2 = 0$

Fonctions du second degré

9 Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions du second degré ? Si oui, donner leurs coefficients a, b et c.

1) $f_1(x) = (x-3)(5-2x)$
2) $f_2(x) = 2x^2 + 3\sqrt{x} - 1$
3) $f_3(x) = \sqrt{7}x^2 - 3x + \dfrac{1}{2}$
4) $f_4(x) = 3x - 1 - 2x^2$

10 Les expressions suivantes sont-elles des trinômes du second degré ? Si oui, préciser les coefficients a, b et c.

1) $\dfrac{3}{4}(x+4)^2 + 1$
2) $3x^3 - 2x^2 + x + \dfrac{3}{2}$
3) $\dfrac{x^2 + 3x + 1}{2}$
4) $(2x-1)^2 + (2-3x)^2$

11 À chacun des trinômes du second degré suivants, associer sa forme canonique.

Trinôme	Forme canonique
$1 - 3x^2$	$3(x-1)^2 + 2$
$3x^2 - 6x + 5$	$3(x-1)^2 + 5$
$-3x^2 + 6x + 8$	$-3x^2 + 1$
$3x^2 - 6x + 8$	$3(x+1)^2 + 5$
$3x^2 + 6x + 8$	$-3(x-1)^2 + 11$

12 ► MÉTHODE 1 p. 12

Mettre sous forme canonique les polynômes du second degré suivants.

1) $x^2 + 4x + 1$
2) $4x^2 - 3$
3) $-2x^2 + 3x - 6$
4) $x^2 + 6x$

13 Mettre sous forme canonique les fonctions polynômes suivantes.

1) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left((x-3)^2 + 4\right)$
2) $g(x) = (x-3)^2 + (1-2x)^2$
3) $h(x) = 2(x-1)(x+3)$
4) $k(t) = 2t^2 + 8t + 8$

14 On considère la fonction du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + \dfrac{39}{2}$.

1) Montrer que la forme canonique de f est :
$f(x) = \dfrac{1}{2}(x-5)^2 + 7$.
2) En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

15 On considère la fonction du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{16}{3}x + \dfrac{17}{3}$.
Marina, Hicham, Sophie et Joël, quatre élèves de 1re S proposent leur réponse.

Marina : $f(x) = \dfrac{2}{3}(x-4)^2 - 5$

Hicham : $f(x) = \dfrac{2}{3}(x+4)^2 - 5$

Sophie : $f(x) = \dfrac{2}{3}(x-4) - 5$

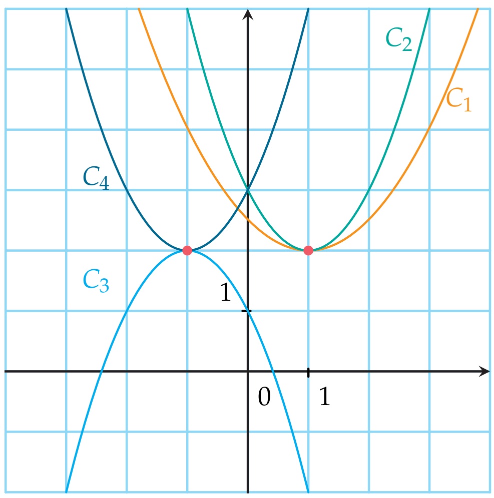
Joël : $f(x) = 2(x+4)^2 - 5$

Leur professeur dit « Je peux éliminer trois réponses sans faire de calculs ».

Quelles réponses peuvent être éliminées sans faire de calcul ?

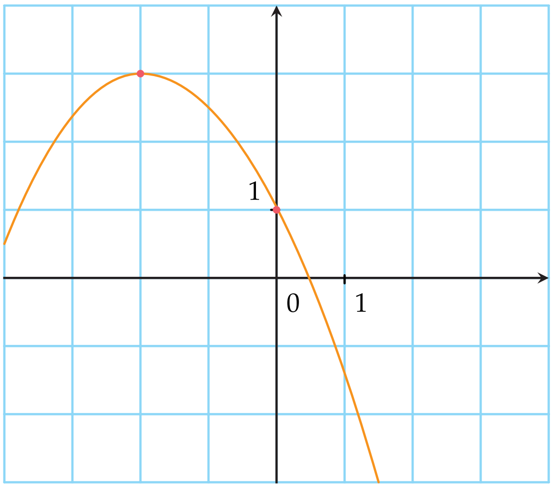
16 Associer les courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 des fonctions du second degré suivantes à leur forme canonique en justifiant.

1) $f_1(x) = (x-1)^2 + 2$
2) $f_2(x) = -(x+1)^2 + 2$
3) $f_3(x) = (x+1)^2 + 2$
4) $f_4(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 2$



17 ► MÉTHODE 2 p. 12

Soit f une fonction du second degré dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

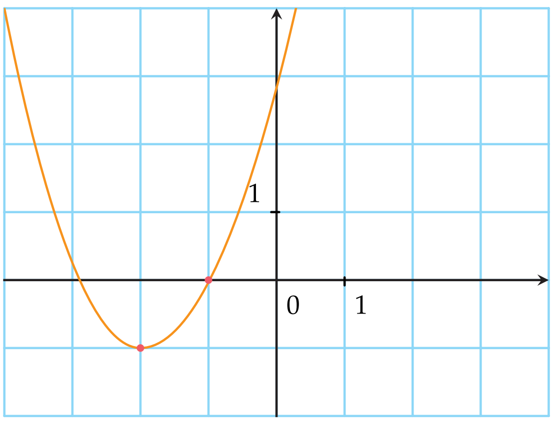


1) Expliquer pourquoi la forme canonique de f peut s'écrire :

$$f(x) = a(x+2)^2 + 3.$$

2) En utilisant l'image de 0, déterminer a et en déduire la forme canonique de f.

18 La parabole ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f.
Déterminer la forme canonique de f.



19 ► MÉTHODE 3 p. 13

On considère une fonction du second degré qui a pour minimum 4, atteint pour $x = 1$.
On sait également que $f(-1) = 2$.
Que vaut $f(3)$?

20 Le tableau de valeurs ci-dessous est celui d'une fonction du second degré f.

X	Y1
0	-17.5
1	-7.5
2	-1.5
3	.5
4	-1.5
5	-7.5
6	-17.5

X=0

1) Quelles sont les coordonnées du sommet de sa parabole ?

2) Déterminer la forme canonique de f.

21 ► MÉTHODE 4 p. 14

Étudier les variations de chacune des fonctions du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

1) $f_1(x) = (x-1)^2 + 10$

2) $f_2(x) = -2(x-5)^2 + 2$

3) $f_3(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{3}$

4) $f_4(x) = -2(x+3)^2 - 5$

22 Étudier les variations de chacune des fonctions du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

1) $f_1(x) = x^2 - x + 1$

2) $f_2(x) = -\dfrac{1}{2}(x-5)(x+3)$

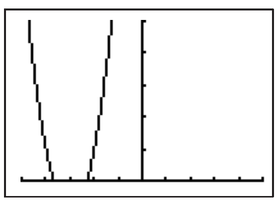
3) $f_3(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{4}{3}$

4) $f_4(x) = 3x^2 - 6x + 3$

23 Étudier les variations de la fonction du second degré f suivant la valeur du paramètre réel m :
$f(x) = mx^2 - (m+1)x + 1.$

24 CALC

Romain a utilisé sa calculatrice pour déterminer le sommet d'une parabole dont il connaît l'équation :
$y = 2x^2 + 12x + 17.$
Il a obtenu l'écran suivant et pense qu'il a fait une erreur. Comment aider Romain ?



S'entraîner

25 Déterminer la fonction du second degré correspondant aux tableaux de variations suivants et aux valeurs données.

1) $f(0) = 1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		↗	2	↘	

2) $g(1) = 0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
g		↘	-2	↗	

26 Déterminer la fonction du second degré correspondant aux tableaux de variations suivants et aux valeurs données.

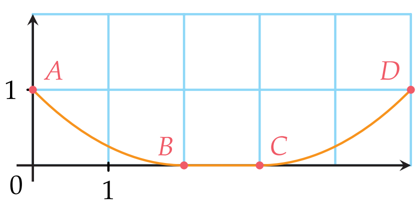
1) $f(5) = -2$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
f		↗	-1	↘	

2) $g(1) = 3$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g		↘	1	↗	

27 Une entreprise a pour mission de construire une mini-rampe pour un skate park constitué de deux arcs de parabole $A_1(0 \leq x \leq 2)$ et $A_2(3 \leq x \leq 5)$ et d'une section plate $S(2 \leq x \leq 3)$ selon la figure suivante.



1) Déterminer la fonction du second degré dont la courbe représentative est l'arc parabolique A_1 de sommet B.

2) Déterminer la fonction du second degré dont la courbe représentative est l'arc parabolique A_2 de sommet C.

28 On souhaite résoudre l'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

1) Compléter les égalités successives :
$x^2 - 2x = (x - ...)^2 + ...$
$x^2 - 2x + 5 = (x - ...)^2 + ...$

2) En déduire que l'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$ est équivalente à $(x-1)^2 = -4$.

3) En déduire la résolution de l'équation :
$x^2 - 2x + 5 = 0$.

29 On souhaite résoudre l'équation $2x^2 - 8x - 1 = 0$.

1) Compléter les égalités successives :
$2x^2 - 8x = 2(x - ...)^2 + ...$
$2x^2 - 8x - 1 = 2(x - ...)^2 + ...$

2) En déduire que l'équation $2x^2 - 8x - 1 = 0$ est équivalente à $(x-2)^2 = \frac{9}{2}$.

3) En déduire la résolution de l'équation :
$2x^2 - 8x - 1 = 0$.

4) Résoudre de la même façon l'équation :
$-x^2 + 3x + 2 = 0$.

Équations du second degré

30 ► MÉTHODE 5 p. 16

Donner le nombre de solutions des équations suivantes.

1) $x^2 + x + 1 = 0$

2) $-2x^2 + x + 1 = 0$

3) $\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{3}{2} = 0$

4) $\sqrt{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$

31 Donner le nombre de solutions des équations suivantes suivant la valeur du paramètre réel m.

1) $x^2 + mx + 1 = 0$

2) $x^2 - 2x + 3m = 0$

32 Résoudre les équations suivantes.

1) $x^2 + x - 2 = 0$

2) $-3x^2 + 2x - 1 = 0$

3) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = 0$

4) $-3x^2 - 1 = 0$

33 Résoudre les équations suivantes.

1) $-x^2 + 3 - 4x = 0$

2) $x^2 + \frac{1}{2}x = 0$

3) $4x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$

4) $x\left(4x^2 + x + 1\right) = 0$

34 Factoriser, si possible, les trinômes du second degré suivants en un produit de polynômes de degré 1.

1) $x^2 + 3x - 4$

2) $x^2 + 4$

3) $3x^2 - 3x + 1$

4) $-x^2 + 4x$

S'entraîner

35 Le nombre a est-il racine du trinôme $P(x)$?

1) $a = 1$ $\quad P(x) = 8x^2 - 7x - 1$
2) $a = 0$ $\quad P(x) = -x^2 + 2x - 1$
3) $a = -2$ $\quad P(x) = x^2 - 2x - 4$
4) $a = 2$ $\quad P(x) = x^2 + x + 2$

36 ALGO

1) On souhaite écrire un algorithme qui détermine si le nombre z est solution de l' équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

```
Algorithme: Second degré
Liste des variables utilisées
a, b, c, z, t : nombre réels
Traitements
Demander a
Demander b
Demander c
Demander z
Donner à t la valeur ...
Si ...
    Afficher ...
    sinon
    Afficher ...
FinSi
Fin de l'Algorithme
```

2) Programmer cet algorithme avec un logiciel ou une calculatrice.
On souhaite trouver les solutions de l'équation : $2x^2 - 80x + 399 = 0$.
Tester les trois nombres suivants :
a) 19
b) 20
c) 21
3) Modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette de vérifier si le nombre 2 est solution de l'équation de degré 3 :
$$x^3 + 8x^2 - 16x - 8 = 0.$$

37 Résoudre les équations suivantes.

1) $x^2 + 3x - 1 = 2x^2 + 5x + 2$
2) $x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}$
3) $4x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 3x + \frac{1}{2}$
4) $(x+3)\left(2x^2 - 3x - 1\right) = 0$

38 Résoudre les équations suivantes.

1) $(x-1)^2 = 2(x+3)^2$
2) $2x + 1 = x^2$
3) $\frac{1}{x-2} + x + 3 = 0$
4) $\frac{3x-4}{x+1} = \frac{x-1}{2x+3}$

39 ALGO CALC

On considère l'équation suivante qui dépend de la valeur du paramètre m :
$x^2 + 3mx + 9 = 0$.

1) a) Avec la calculatrice, créer un programme qui détermine le nombre n de solutions de l'équation pour les valeurs de m suivantes.

m	-3	-2	-1	0	1	2	3
n							

b) Conjecturer le nombre n de solutions de l'équation $x^2 + 3mx + 9 = 0$ suivant la valeur de m.

2) Résoudre l'équation $x^2 + 3mx + 9 = 0$ en se plaçant dans les différents cas de la question **1) b)**.

40 Déterminer les racines des trinômes suivants.

1) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$
2) $x^2 - 4x + 4$
3) $4 + 5x - x^2$
4) $4x^2 + 3$

41 CALC

Soit P la parabole d'équation $y = x^2 - x + 1$ et (d) la droite d'équation $y = 4x - 3$.

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer les coordonnées des éventuels points d'intersection de P et (d).
2) Déterminer par le calcul, s'il(s) existe(nt), le(s) point(s) d'intersection de P et (d).

42 CALC

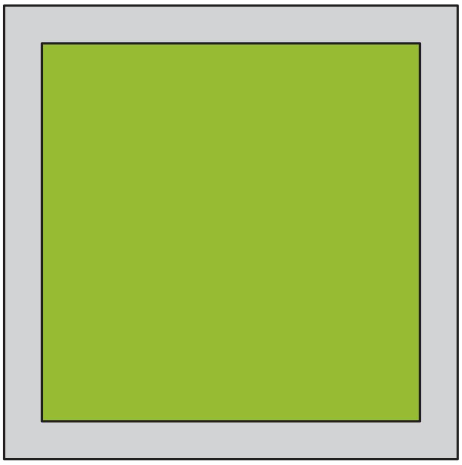
Soit P la parabole d'équation $y = 2x^2 + x + 4$ et P' la parabole d'équation $y = -x^2 - 5x + 1$.

1) Conjecturer à l'aide de la calculatrice, le nombre de points d'intersection de P et P'.
2) Déterminer, par le calcul, le nombre de points d'intersection de P et P'.
3) En déduire les coordonnées des points d'intersection des paraboles P et P'.

43 La parabole P coupe l'axe des ordonnées en $A(0\,;\,3)$ et passe par $B(1\,;\,-1)$ et $C(3\,;\,1)$. Déterminer son équation sous la forme $y = ax^2 + bx + c$.

S'entraîner

44 À l'intérieur d'un jardin carré dont la longueur du côté est 10 mètres, un jardinier souhaite installer, le long du bord, une allée en graviers de largeur constante.
Comment faire en sorte que l'aire de l'allée soit égale à celle du carré intérieur ?



45 ALGO

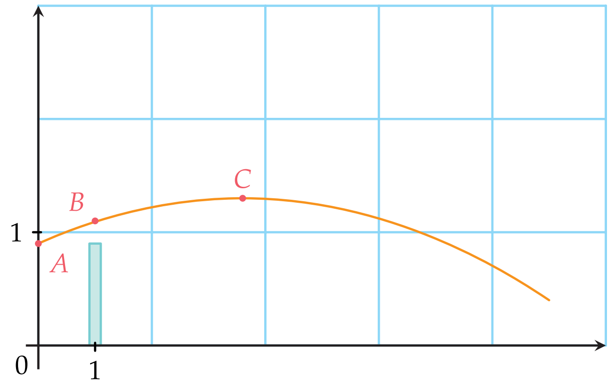
1) On souhaite écrire un algorithme qui détermine le nombre de solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

```
Algorithme :Second degré
Liste des variables utilisées
a, b, c, D : nombre réels
Traitements
Demander a
Demander b
Demander c
Donner à D la valeur ...
Si ... alors
  Afficher « l'équation a 2 solutions »
  sinon si ...
  Afficher « l'équation a 1 solution »
  sinon
  Afficher «.......................»
Finsi
Fin de l'Algorithme
```

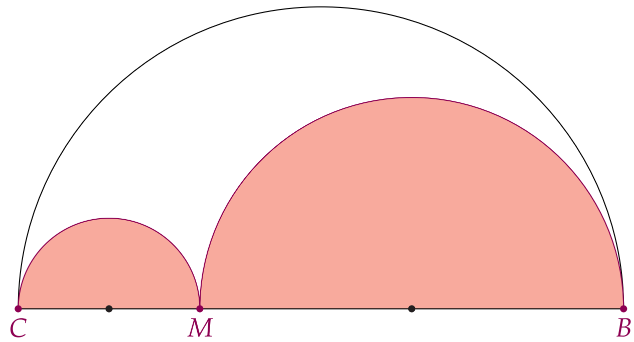
2) Modifier l'algorithme précédent pour qu'il donne les solutions éventuelles de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

46 Un tennisman frappe droit devant lui une volée à 1 m du filet alors que la balle est à 0,9 m de hauteur en A. La balle franchit le filet en B à une hauteur de 1,1 m et atteint en C une hauteur maximale de 1,3 m.
La longueur d'un terrain de tennis est 23,77 m.
La balle sortira-t-elle du cours ?



47 Un designer doit réaliser un logo pour une entreprise. Il veut créer la partie blanche de la figure ci-dessous, située à l'intérieur du demi-disque de diamètre $[BC]$ et à l'extérieur des demi-disques de diamètre $[CM]$ et $[MB]$ où M est un point quelconque du segment $[BC]$.
On a $BC = 10$ cm et on pose $x = CM$.

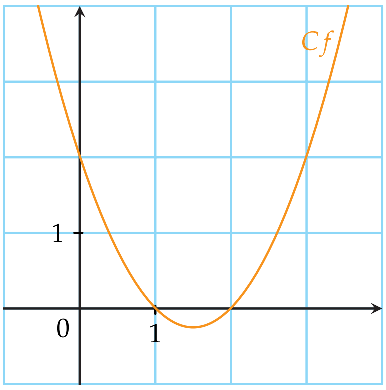


Le designer doit faire en sorte que l'aire de la partie blanche soit égale à la moitié de l'aire du demi-disque de diamètre $[BC]$.
Comment doit-il positionner le point M ?

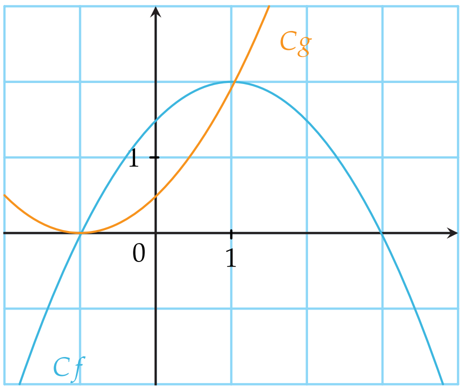
48 Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter le Nouvel An. Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes.
Sachant que 468 cadeaux ont été distribués, combien de personnes étaient présentes à cette fête ?

Inéquations du second degré

49 Soit C_f la courbe représentative ci-contre d'une fonction f du second degré.
Résoudre graphiquement l'inéquation :
1) $f(x) > 0$
2) $f(x) \leq 2$



50 Soit C_f et C_g les courbes représentatives de deux fonctions du second degré f et g.



1) Résoudre graphiquement :
a) $f(x) \geq 0$ **b)** $f(x) > g(x)$
2) Donner, à l'aide du graphique, la position relative des courbes C_f et C_g.

51 ► MÉTHODE 6 p. 18
Résoudre les inéquations du second degré suivantes dans $\mathbb{R}$.
1) $x^2 + x - 2 > 0$ **3)** $2x^2 + 3x \geq 0$
2) $-3x^2 + x - 2 \leq 0$ **4)** $2x^2 - 8 < 0$

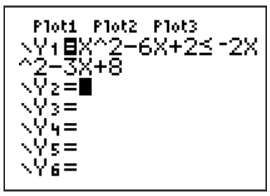
52 Résoudre les inéquations du second degré suivantes sur $\mathbb{R}$.
1) $\frac{1}{2}x^2 + 7x - 3 > 0$ **3)** $-2x^2 - 9 \geq 0$
2) $-3x^2 + 4x + 1 \leq 0$ **4)** $2x^2 - 4x < 0$

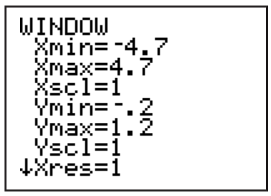
53 Résoudre les inéquations suivantes sur I.
1) $2x^2 + 8x > 4$ $I = \mathbb{R}$
2) $x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \leq x^3 + 3x^2 + 2x + 48$ $I = \mathbb{R}$
3) $\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 1} < 1$ $I = \mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,1\}$
4) $\frac{x^2 + x + 1}{x - 4} \geq 0$ $I = \mathbb{R}\backslash\{4\}$

54 Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.
1) $x^2 - 4 > 3x$ $I = \mathbb{R}$
2) $2x^2 - x + 1 \leq x^2 + 3x - 4$ $I = \mathbb{R}$
3) $\frac{1}{x - 4} - \frac{1}{x - 3} < \frac{1}{2}$ $I = \mathbb{R}\backslash\{3\,;\,4\}$
4) $\frac{x + 1}{2x^2 - 5x - 4} < 0$ $I = \mathbb{R}$

55 Un carré $ABCD$ de côté 2 est partagé en deux parties en utilisant un point E du segment $[AC]$.
Comment faire en sorte que l'aire du triangle DCE soit supérieure ou égale à $\frac{3}{2}$?

56 CALC
Soit C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 6x + 2$ et $g(x) = -2x^2 - 3x + 8$.
1) Conjecture
a) On étudie la variable booléenne $\{f(x) \leq g(x)\}$ obtenue avec 2nd MATH. Elle vaut 1 si C_f est en-dessous de C_g et 0 sinon. Entrer dans la calculatrice les informations suivantes.

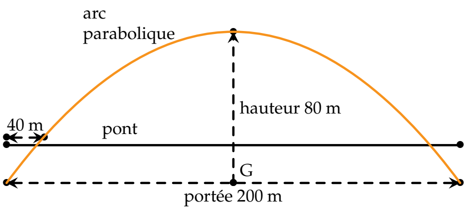




b) Que peut-on conjecturer sur la position relative des courbes C_f et C_g ?
2) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
3) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

Approfondir

57 Un pont est soutenu par un arc parabolique d'une portée de 200 m et d'une hauteur de 80 m. Le pont et l'arc se coupent à 40 m de la rive.



Quelle est la hauteur du pont ?

58 Soit x la longueur de l'arête du cube. Si on augmente de deux centimètres la longueur de l'arête d'un cube, son volume augmente alors de 2 402 cm^3.
Quelle est la longueur de l'arête de ce cube ?

59 Le directeur d'une salle de théâtre a remarqué qu'à 40 € la place, il peut compter jusqu'à 500 spectateurs et que chaque baisse de 2,50 € lui amène 100 personnes de plus. On souhaite savoir combien il doit faire payer la place pour avoir une recette maximale.

1) Soit x le nombre de baisses du prix de la place de 2,50 €.
   a) Parmi les fonctions suivantes, choisir celle qui permet de modéliser le problème.

$$f_1(x) = (40 + 2,5x)(500 + 100x)$$
$$f_2(x) = (40 - 2,5x)(500 + 100x)$$
$$f_3(x) = (40 + 2,5x)(500 - 100x)$$
$$f_4(x) = (40 - 2,5x)(500 - 100x)$$

   b) Préciser son ensemble de définition.
2) En étudiant les variations de la fonction choisie, résoudre le problème.

60 **Transformisme**

L'objectif est de résoudre l'équation suivante :
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 1.$$

1) Deux valeurs sont à exclure d'emblée de l'ensemble des solutions. Lesquelles ?
2) Montrer que cette équation équivaut à :
$$(x+1) + (x-1) = (x-1)(x+1).$$
3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation.

61 **Encore plus fort**

On souhaite résoudre l'équation de degré 4 suivante :
$$2x^4 + x^2 - 3 = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

1) On pose $X = x^2$. Quelle équation en X obtient-on ?
2) Résoudre l'équation obtenue. On note X_1 et X_2 ses solutions.
3) En résolvant $x^2 = X_1$ puis $x^2 = X_2$, déterminer les solutions de l'équation **(1)**.
4) En déduire que l'on peut écrire :
$$2x^4 + x^2 - 3 = 2(x-1)(x+1)\left(x^2 + ax + b\right)$$
où a et b sont des nombres à déterminer.

62 **Somme et produit des racines**

L'objectif est de démontrer et d'illustrer la propriété.

PROPRIÉTÉ

Un trinôme du second degré $X^2 - SX + P$ dont le discriminant est strictement positif a deux racines x_1 et x_2 telles que
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \times x_2 = P \end{cases}$$

1) Démonstration
   a) Développer l'expression $(X - x_1)(X - x_2)$.
   b) En déduire, par unicité des coefficients d'un polynôme du second degré, que l'on a le système suivant $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \times x_2 = P. \end{cases}$ **(1)**
2) Application 1
   Donner l'écriture d'un trinôme du second degré dont les racines sont :
   a) 2 et 3 b) 1 et -4
3) Application 2
   a) On considère l'équation du second degré suivante $x^2 - 5x + 6 = 0.$ **(2)**
   Montrer que 2 est solution de l'équation **(2)**.
   En déduire la deuxième solution de l'équation **(2)** en résolvant le système **(1)**.
   b) On considère l'équation $x^2 + x - 2 = 0$.
   Trouver une solution évidente, puis en déduire la deuxième solution en résolvant le système **(1)**.

63 **Ni trop chaud, ni trop froid**

Pour de nombreuses espèces (mammifères, poissons, micro-organismes), on peut faire l'hypothèse que la relation du taux de croissance μ (en pourcentage du nombre d'individus par heure) de la population avec la température T (en °C) de l'environnement est un polynôme du second degré.

Les valeurs des coefficients a, b et c vont dépendre de l'espèce considérée.

Du point de vue de la biologie, on a nécessairement $\mu \geq 0$.

On sait qu'il existe pour chaque individu un optimum de croissance T_{opt}, ainsi que des températures minimale T_1 et maximale T_2 de croissance au-delà desquelles il n'y a plus de croissance. On note $\mu(T) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ la forme canonique de μ.

1) Modélisation

a) Justifier que la fonction μ est définie sur $[T_1\ ;\ T_2]$.

b) Expliquer pourquoi $\begin{cases} \mu(T_{\text{opt}}) = \beta \\ \mu(T_1) = 0 \\ \mu(T_2) = 0. \end{cases}$

2) Étude de la bactérie *Methylosinus trichosporium*

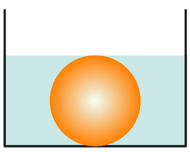
On connaît approximativement $T_{\text{opt}} = 23$ qui correspond à $\mu(T_{\text{opt}}) = 0{,}012$ soit une croissance du nombre d'individus de 1,2 % par heure et $T_1 = 9$.

a) En déduire la forme canonique de μ.

b) Quelle est la température T_2 pour cette bactérie ?

c) Si la population de *Methylosinus trichosporium* est composée de 300 individus, quelle sera la population à une température de 30 °C au bout de 12 h ?

64 CALC



On place une bille sphérique de rayon x cm dans un récipient cylindrique de rayon $R_1 = 8$ cm. On souhaite savoir pour quelle(s) valeur(s) du rayon x la bille affleure à la surface de l'eau si on verse le contenu d'un verre d'eau dans le récipient. Le verre d'eau a un rayon $R_2 = 4$ cm et une hauteur $h = \dfrac{355}{12}$.

1) a) Quel volume d'eau V_e est contenu dans le verre ?

b) Quelle relation relie le volume d'eau V_e du verre et le volume de la bille $V(x)$ pour que la bille affleure à la surface de l'eau ?

c) En déduire que x est solution de l'équation suivante

$$x^3 - 96x + 355 = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

2) Pour résoudre l'équation précédente, on cherche si elle possède une solution entière.

a) À l'aide la calculatrice, trouver la solution entière de l'équation (1).

b) On peut alors factoriser l'équation **(1)** sous la forme

$$(x-n)(ax^2+bx+c) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

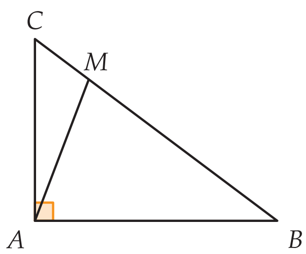
Déterminer les nombres a, b et c en développant puis en résolvant un système.

c) Résoudre l'équation **(2)**.

d) Conclure sur la (ou les) valeur(s) du rayon de la bille pour qu'elle affleure à la surface de l'eau.

65 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$ et $AC = 3$.

On cherche la position du point M sur le segment $[BC]$ telle que la distance AM soit minimale.



1) a) Préciser le repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(0\,;0)$, $(4\,;0)$ et $(0\,;3)$.

b) Déterminer l'équation de la droite (BC) dans ce repère.

c) Quelle relation peut-on en déduire pour les coordonnées de M ?

2) Soit f la fonction qui à l'abscisse x de M dans ce repère associe la distance AM^2 pour $x \in [0\ ;\ 4]$.

a) Montrer que $f(x) = \dfrac{25}{16}\left(x - \dfrac{36}{25}\right)^2 + \dfrac{144}{25}$.

b) Quel est le minimum de f sur $[0\ ;\ 4]$?

En déduire la distance AM minimale et les coordonnées du point M correspondantes.

c) Représenter le repère $\mathscr{R}$ et y placer les points A, B, C et M. Que remarque-t-on ?

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Mettre une fonction du second degré sous forme canonique
- Résoudre une équation du second degré
- Modéliser une situation à l'aide d'une fonction
- Résoudre une inéquation du second degré

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On considère la fonction f du second degré définie par $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$. On note C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\,;\,I, J)$.

66 La forme canonique de f est :

ⓐ $f(x) = 2(x-1)^2 - \dfrac{49}{2}$

ⓑ $f(x) = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{49}{2}$

ⓒ $f(x) = 2(x+1)^2 - \dfrac{49}{2}$

ⓓ $f(x) = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{49}{2}$

67 La parabole C_f a pour sommet S de coordonnées :

ⓐ $(2\,;\,1)$ ⓑ $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{49}{2}\right)$ ⓒ $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{49}{2}\right)$ ⓓ $(2\,;\,-1)$

68 Le tableau de variations de f est :

ⓐ

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	↗	$-\dfrac{49}{2}$	↘

ⓑ

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
f	↗	$-\dfrac{49}{2}$	↘

ⓒ

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
f	↘	$-\dfrac{49}{2}$	↗

ⓓ

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
f	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗

69 Le discriminant du trinôme du second degré $f(x)$ est :

ⓐ -188 ⓑ -192 ⓒ 196 ⓓ 52

70 L'équation $f(x) = 0$ a pour ensemble de solutions :

ⓐ $S = \{-4\,;\,3\}$ ⓑ $S = \{-3\,;\,4\}$ ⓒ $S = \{3\,;\,4\}$ ⓓ $S = \varnothing$

71 L'inéquation $f(x) > 0$ a pour ensemble de solutions :

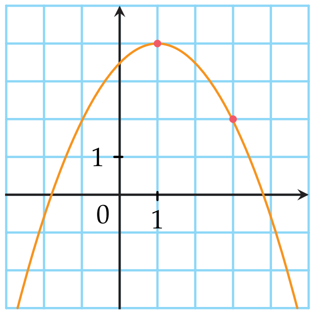
ⓐ $S = [-3\,;\,4]$

ⓑ $S =]-4\,;\,3[$

ⓒ $S =]-\infty\,;\,-4[\cup]3\,;\,+\infty[$

ⓓ $S = \varnothing$

On considère une fonction g du second degré dont on connaît la courbe représentative, notée C_g, ci-contre dans le repère orthonormé $(O\,;\,I, J)$.



72 La forme canonique de g est :

ⓐ $g(x) = 0,5(x-1)^2 + 4$
ⓑ $g(x) = 0,5(x+1)^2 + 4$
ⓒ $g(x) = -0,5(x-1)^2 + 4$
ⓓ $g(x) = -0,5(x-1)^2 - 4$

73 Le discriminant du trinôme $g(x)$ est :

ⓐ nul
ⓑ strictement positif
ⓒ strictement négatif

74 On note x_1 et x_2 les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$ telles que $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$.
La fonction g est de la forme $g(x) = ax^2 + bx + c$. On sait que $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 1$ et $\Delta = 8$.
Les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont :

ⓐ $1 - \sqrt{8}$ et $1 + \sqrt{8}$
ⓑ $1 - 2\sqrt{2}$ et $1 + 2\sqrt{2}$
ⓒ $\dfrac{1-\sqrt{8}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{8}}{2}$
ⓓ $\dfrac{\sqrt{8}-1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{8}+1}{2}$

Quel est l'ensemble des solutions des inéquations suivantes ?

75 $x^2 + 2x + 8 \leq 0$:

ⓐ $S = R$
ⓑ $S = \varnothing$
ⓒ $S = [-5\,;\,-2]$
ⓓ $S =]-\infty\,;\,-5] \cup [-2\,;\,+\infty[$

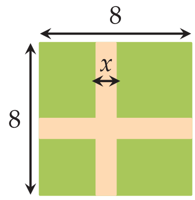
76 $\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2} \leq 0$:

ⓐ $S = R$
ⓑ $S = \varnothing$
ⓒ $S = \{-1\}$
ⓓ $S = \{-1\,;\,1\}$

77 $-3x^2 + x + 2 > 0$:

ⓐ $S = \mathbb{R}$
ⓑ $S = \varnothing$
ⓒ $S = \left]-\dfrac{2}{3}\,;\,1\right[$
ⓓ $S = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{2}{3}\right[\cup]1\,;\,+\infty[$

78 Un jardin public a la forme d'un carré de 8 m de côté. Il est traversé par deux allées perpendiculaires de même largeur x. Déterminer x sachant que, pour recouvrir ces allées, on a utilisé une quantité de gravier permettant de recouvrir 15 m^2 de terrain.
La solution du problème est :



ⓐ 8
ⓑ 15
ⓒ 2
ⓓ 1

Travaux pratiques

TP 1 Véhicules propres

INFO CALC

Une entreprise fabrique des voitures électriques qu'elle commercialise. Le coût de fabrication (en milliers d'euros) de q voitures est modélisé par la fonction $c\left(q\right) = -\dfrac{1}{10}q^3 + 2q^2 - 2,1q + 21$ pour $q \in \left[0\ ;\ 10\right]$. Une voiture est vendue au prix de 10 000 € et toutes les voitures fabriquées sont vendues. On s'intéresse au bénéfice de l'entreprise, c'est-à-dire à la différence entre la recette et le coût de fabrication. Lorsque le bénéfice de l'entreprise est positif, on dit que la production est rentable.

1 Étude de la fonction bénéfice

1) Calculer $c(0)$. Le nombre $c(0)$ représente les coûts fixes de l'entreprise.

2) Montrer que le bénéfice de l'entreprise s'écrit $B\left(q\right) = \dfrac{1}{10}q^3 - 2q^2 + 12,1q - 21$.

3) À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, conjecturer le nombre de voitures à produire pour que la production soit rentable.

2 Étude algébrique de la fonction B

1) Vérifier que 3 est racine de l'expression $B(q)$.

2) Montrer que l'on a $B\left(q\right) = \dfrac{1}{10}\left(q-3\right)\left(q^2 - 17q + 70\right)$ quel que soit $q \in \left[0\ ;\ 10\right]$.

3) En déduire le signe de la fonction B.

4) Conclure sur la quantité de voitures à produire pour que la production soit rentable.

3 Bénéfice maximal

On définit le coût marginal de production. Il s'agit du coût de production d'une unité supplémentaire quand on en a déjà produit q : $c_m\left(q\right) = c\left(q+1\right) - c\left(q\right)$. Le bénéfice est maximal quand le coût marginal est égal au prix de vente.

1) À l'aide d'un tableur, calculer le coût marginal de production et remplir le tableau suivant.

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_m(q)$										

Pour quelle quantité d'objets vendus, le coût marginal est-il égal au prix de vente de l'objet (ou le plus proche possible) ? Que se passe-t-il lorsque le coût marginal devient supérieur au prix de vente de l'objet ?

2) On a obtenu avec un logiciel de calcul formel l'écran suivant :

1 -1/10 (x+1)^3+2(x+1)^2-2.1(x+1)+21

$\rightarrow \dfrac{-x^3 + 17\,x^2 + 16\,x + 208}{10}$

2 -1/10 (x+1)^3+2(x+1)^2-2.1(x+1)+21-(-1/10 x^3+2x^2-2.1x+21)

$\rightarrow \dfrac{-3\,x^2 + 37\,x - 2}{10}$

Que peut-on en déduire ?

3) Calculer la quantité de voiture vendues pour laquelle le coût marginal est égal au prix de vente. Quelle conclusion doit en tirer l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal ?

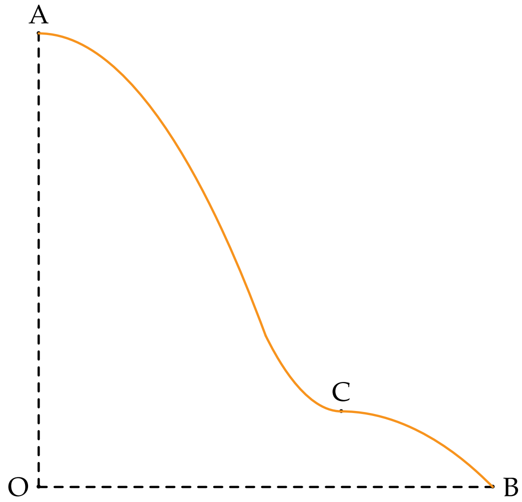
TP 2 Encore plus vite

INFO

Un ingénieur a pour mission de créer un toboggan dont la hauteur OA et la longueur OB sont de 3 m. Le toboggan est composé de deux parties :

- une parabole concave ($a < 0$) de sommet $A(0\ ;\ 3)$ représentant la fonction f_1 sur l'intervalle $[0\,;1]$;
- une courbe qui correspond à un polynôme de degré 3 représentant la fonction f_2 dont l'expression est $f_2(x) = c(x-2)^3 + d$ sur l'intervalle $[1\,;3]$.

Par ailleurs, le toboggan passe par les points $A(0\ ;\ 3)$, $B(3\ ;\ 0)$ et $C(2\ ;\ 0,5)$.



1 Construction du toboggan

Afin de modéliser le toboggan sur l'intervalle $[0\,;3]$, l'ingénieur utilise donc les deux fonctions f_1 définie sur $[0\ ;\ 1]$ et f_2 définie sur $[1\,;3]$.

1) Exprimer les conditions imposées pour le toboggan afin de montrer que l'on doit résoudre le système (S) suivant :

$$\begin{cases} f_1(x) = ax^2 + 3 & \\ f_2(x) = c(x-2)^3 + d & \\ f_1(1) = f_2 & \textbf{(1)} \\ f_2(2) = 0,5 & \textbf{(2)} \\ f_2(3) = 0 & \textbf{(3)} \end{cases}$$

2) Avec un logiciel de géométrie, créer trois variables réelles a, c et d, puis définir les fonctions f_1 et f_2, afin de former les deux parties du toboggan.

2 Équation du toboggan

L'objectif de cette partie est de résoudre le système (S).

1) Exprimer la condition **(2)** afin de déterminer le coefficient d.

2) Exprimer la condition **(3)** afin de déterminer le coefficient c.

3) Enfin, exprimer la condition **(1)** afin de déterminer le coefficient a.

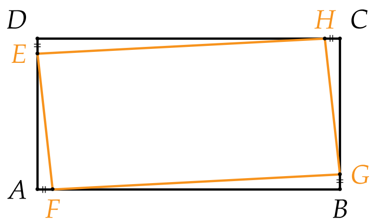
4) Conclure sur l'expression des fonctions f_1 et f_2.

Travaux pratiques

TP 3 Mon beau miroir

INFO

Une entreprise souhaite réaliser des miroirs originaux tout en conservant une certaine symétrie. La glace $EFGH$ est collée sur le rectangle $ABCD$ (avec $AB = 7$ cm, $AD = 5$ cm) de telle sorte que $AF = BG = CH = DE$. En particulier, l'ingénieur production a pour contrainte que l'aire de la glace soit minimale.



1 Conjecture

1) a) À l'aide d'un logiciel de géométrie, créer le polygone $ABCD$.

b) Créer une variable a. On définit les coordonnées de F par $F(x_A + a\ ;\ y_A)$. En déduire les coordonnées de G, H et E.

2) Créer le polygone $FGHE$ et visualiser son aire.

3) Conjecturer, en faisant varier a, une solution à la contrainte donnée à l'ingénieur production.

2 Démonstration

On note g la fonction qui à la distance $AF = x$ associe l'aire $g(x)$ de la glace.

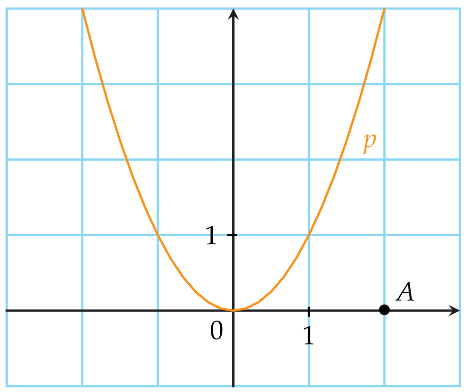
1) À quel intervalle appartient x ?

2) Montrer que l'aire de la glace s'écrit $g(x) = 2x^2 - 12x + 35$.

3) En déduire la solution du problème.

Récréation, énigmes

- Un cycliste parcourt la campagne sur une route rectiligne en faux-plat descendant à la vitesse de 35 km/h entre une ville A et une ville B séparées de 60 km. Au retour, en faux-plat montant, le cycliste roule à 29 km/h mais le vent le ralentit de façon constante. On note v l'augmentation de vitesse due au vent à l'aller et on suppose qu'elle est égale à la perte de vitesse du cycliste sur le trajet du retour. Pour le retour, il a mis 1 heure de plus qu'à l'aller. Calculer la perte de vitesse due au vent sur le trajet du retour.
- Trouver deux entiers dont la somme est 37 et le produit 342.
- Le triangle de côtés 3, 4 et 5 est un triangle rectangle. Si on ajoute une même longueur aux trois côtés du triangle, reste-t-il rectangle ?
- On considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$, M un point de (P) et le point A de coordonnées $(2\,;0)$.
  Quelle(s) position(s) du point M rend la distance AM minimale ?



ANALYSE

2

Fonctions de référence

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Connaître la définition d'une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle
- Écrire et représenter les intervalles de $\mathbb{R}$
- Utiliser un tableau de variations
- Connaître les fonctions carré et inverse

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f.

x	-4	-1	2	5
$f(x)$	3 ↘	-2 ↗	1 ↘	-5

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elles sont vraies, fausses, ou si l'on ne peut pas savoir.

1) $f(0) < f(1)$
2) $f(-3) < f(4)$
3) $f(0) > f(5)$
4) $f(3) < f(5)$
5) $f(2) > f(-3)$
6) $f(3) < f(4)$

2 Préciser le sens de variation des fonctions suivantes sur les intervalles proposés.

1) $f : x \mapsto -2x + 5$ sur $\mathbb{R}$
2) $g : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$
3) $h : x \mapsto 3x - 7$ sur $\mathbb{R}$
4) $l : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$

3 Dans chaque cas, comparer les deux nombres sans les calculer.

1) $1,15^2$ et $1,3^2$
2) $(-2,05)^2$ et $(-1,99)^2$
3) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}+3}$
4) $-\frac{1}{0,8}$ et $-\frac{1}{0,7}$

4 Résoudre les équations suivantes.

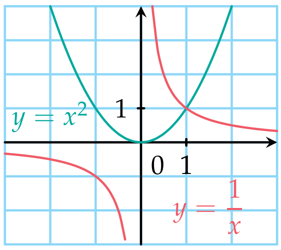
1) $\frac{1}{x} = -2$
2) $\frac{1}{x} = \frac{3}{4}$
3) $\frac{-3}{x} = \frac{1}{5}$

5 Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $\frac{1}{x}$.

1) $2 \leq x \leq 5$
2) $-4 < x < -\frac{1}{2}$
3) $10^2 \leq x \leq 10^4$
4) $-1 < x < -10^{-2}$

6 Résoudre les inéquations suivantes en s'aidant du graphique.

1) $x^2 > 1$
2) $x^2 \leq 4$
3) $\frac{1}{x} > 2$
4) $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$



7 Sur une droite graduée de repère $(O\,;\,I)$, M est un point quelconque d'abscisse x.

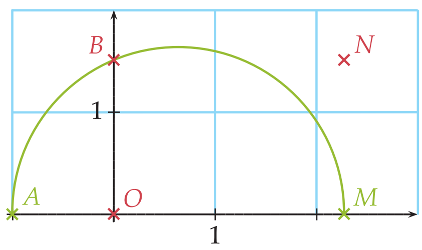
1) Colorier en bleu l'ensemble des points M tels que $OM \leq 2$. Préciser l'ensemble décrit par x.
2) Colorier en rouge l'ensemble des points M tels que $OM > 3$. Préciser l'ensemble décrit par x.

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Une nouvelle fonction

INFO



On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.
Placer le point $A\,(-1\,;\,0)$. Construire sur l'axe (Ox) un point M d'abscisse $x \geq 0$.
Construire le demi-cercle C de diamètre $[AM]$ au-dessus de l'axe des abscisses.
Le demi-cercle C coupe l'axe (Oy) en un point B.
Construire le point N ayant même abscisse que M et même ordonnée que B.
Activer la trace de N.
Déplacer M. Observer que la courbe décrite par le point N est une demi-parabole.

2) a) Calculer les coordonnées du centre Ω du demi-cercle C en fonction de x.

b) Calculer le rayon de C en fonction de x.

c) En utilisant le triangle $OB\Omega$ rectangle en O, calculer OB en fonction de x.

d) En déduire l'équation de la courbe trouvée au **1)**.

ACTIVITÉ 2 Famille de fonctions

INFO

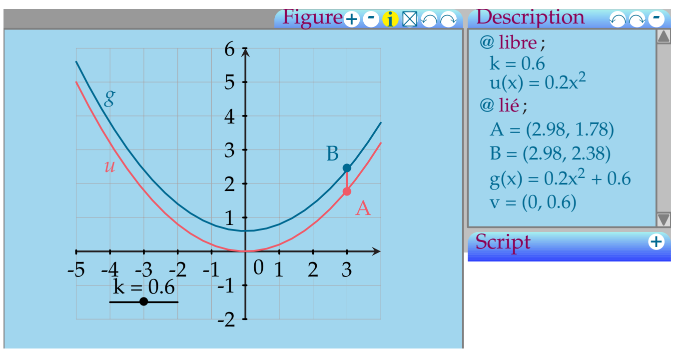
Partie 1 : Fonction $u + k$

1) À l'aide d'un logiciel, tracer en rouge la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,2x^2$.
Marquer un point A sur cette courbe.

2) Créer un curseur k allant de -5 à 5, avec une incrémentation de 0,1.

3) Tracer sur le même graphique en bleu la courbe représentative de la fonction :
$g : x \mapsto u\,(x) + k$.
Construire le point B$(x_A\,;\,y_A + k)$. Où se trouve ce point ? Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Déplacer A. Quelle est la transformation géométrique qui permet de passer de $\mathscr{C}_u$ à $\mathscr{C}_g$?

4) Faire varier k. Comparer le sens de variation des fonctions u et g.

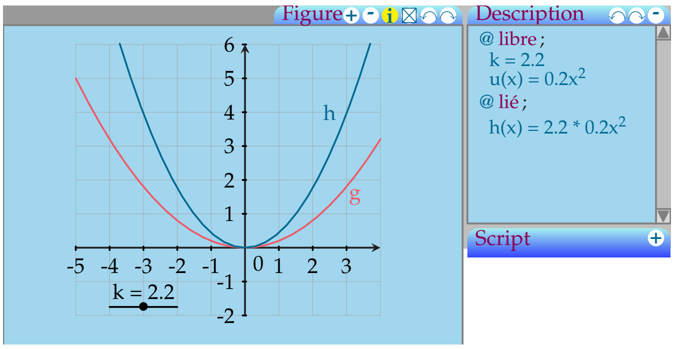


Partie 2 : Fonction ku

1) Effacer les objets précédents excepté u et k. Tracer en vert la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto k \times u(x)$.

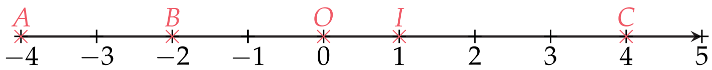
2) Faire varier k. Comparer graphiquement, le sens de variation des fonctions u et h, pour $k > 0$ et pour $k < 0$.

3) Que peut-on dire des courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_h$ lorsque $k = -1$?



ACTIVITÉ 3 Gardez vos distances !

On considère la droite des réels munie du repère $(O\,;\,I)$ sur laquelle on a placé les points A, B et C d'abscisses respectives -4 ; -2 et 4.



1) Donner les distances AB, CI et OC.

2) Soit x et y deux réels ayant pour points images respectifs M et N sur la droite des réels. On note $d(x\,;\,y)$ la distance MN.

a) Compléter.

Si $x \leq y$, alors $d(x\,;\,y) = ... - ...$

Si $x \geq y$, alors $d(x\,;\,y) = ... - ...$

b) Calculer $d(3{,}1\,;\,5)$, $d(-1{,}3\,;\,4{,}2)$ et $d(-1{,}3\,;\,-2{,}1)$.

ACTIVITÉ 4 Nous n'avons absolument pas les mêmes valeurs !

Soit a un réel, on appelle valeur absolue de a, notée $|a|$, la distance entre a et 0.

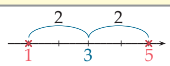
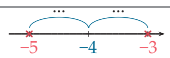
1) Calculer $|-5|$, $|3|$ et $|0|$.

2) a) Quels sont les réels dont la valeur absolue est égale à 3 ?

b) Quels sont les réels dont la valeur absolue est égale à -1 ?

3) Pour tous les nombres a et b. Montrer que $d(a\,;\,b) = |a - b|$.

4) Recopier et compléter le tableau.

Distance	Schéma	Alternative	Valeur absolue
$d(x\,;\,3) = 2$		$x = 1$ ou $x = 5$	$\lvert x - 3\rvert = 2$
$d(x\,;\,0) = 3$			
			
		$x = 0$ ou $x = -4$	
			$\lvert x + 5\rvert = 3$
$d(x\,;\,2) = 0$			

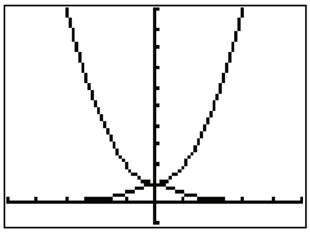
Activités d'approche

ACTIVITÉ 5 Inversons une fonction !

CALC

Partie 1 : Conjectures

1) À l'aide d'une calculatrice, afficher comme ci-contre, la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$ puis celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.



2) Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de u et de f ?

Partie 2 : Étude sur $[0\ ;\ +\infty[$

Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$.

1) En utilisant le sens de variation de la fonction carré, montrer que $1 \leq u(a) < u(b)$.

2) En utilisant le sens de variation de la fonction inverse, comparer $f(a)$ et $f(b)$.

3) En déduire le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4) Quelle remarque peut-on faire sur le sens de variation de u et f sur $[0\ ;\ +\infty[$?

Partie 3 : Étude sur $]-\infty\ ;\ 0]$

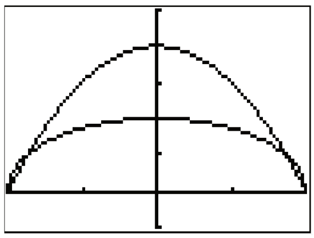
Par un raisonnement analogue, comparer le sens de variation de u et f sur $]-\infty\ ;0]$.

ACTIVITÉ 6 Racine carrée d'une fonction

CALC

Partie 1 : Conjectures

1) À l'aide de la calculatrice, afficher comme ci-contre, la courbe représentative de la fonction u définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $u(x) = 4 - x^2$, puis celle de la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x) = \sqrt{u(x)}$.



2) Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation des fonctions u et f ?

Partie 2 : Étude sur $[0\ ;\ 2]$

Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b \leq 2$.

1) Montrer que $u(a) > u(b) \geq 0$.

2) En utilisant le sens de variation de la fonction racine carrée, comparer $f(a)$ et $f(b)$.

3) En déduire le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4) Quelle remarque peut-on faire sur le sens de variation de u et f sur $[0\ ;\ 2]$?

Partie 3 : Étude sur $[-2\ ;\ 0]$

Par un raisonnement analogue, comparer le sens de variation de u et f sur $[-2\ ;\ 0]$.

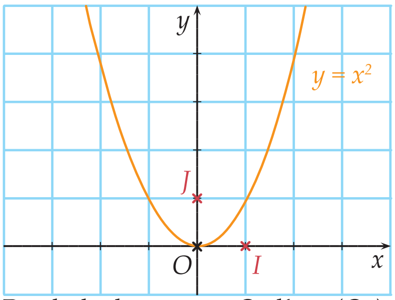
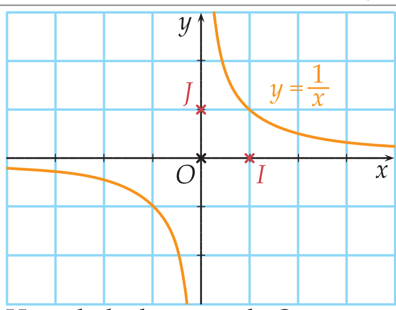
1. Sens de variations d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- f est **croissante** sur I lorsque pour tous les réels a et b dans I :
  si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$
- f est **strictement croissante** sur I lorsque pour tous les réels a et b dans I :
  si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$
- f est **décroissante** sur I lorsque pour tous les réels a et b dans I :
  si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$
- f est **strictement décroissante** sur I lorsque pour tous les réels a et b dans I :
  si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$
- f est **monotone** sur I lorsque f est croissante sur I ou décroissante sur I.

2. Fonctions carré et inverse

Fonction et ensemble de définition D	Sens de variation	Courbe dans un repère orthogonal
Fonction carré $x \mapsto x^2$ $D = \mathbb{R}$	La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. • Si $0 \leq a < b$, alors $a^2 > b^2$ • Si $a < b \leq 0$, alors $a^2 < b^2$	 Parabole de sommet O, d'axe (Oy)
Fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$	La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$. • Si $0 < a < b$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ • Si $a < b < 0$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$	 Hyperbole de centre de O

Cours - Méthodes

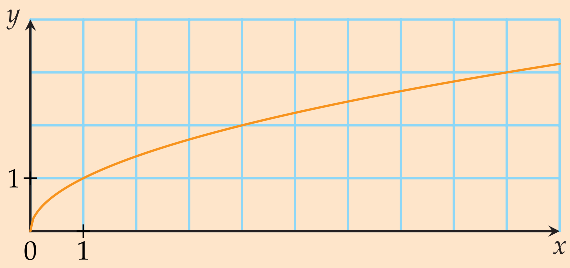
3. Fonction racine carrée

DÉFINITION

La **fonction racine carrée** est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

PROPRIÉTÉ

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.



PREUVE Posons $f(x)=\sqrt{x}$. Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$.
Comparons $f(a)$ et $f(b)$ en étudiant le signe de leur différence :

$$f(a)-f(b)=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

$a-b<0$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ donc $f(a)-f(b)<0$ donc $f(a)<f(b)$.

CONSÉQUENCE : Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

Exemple

Dans chaque cas, comparer les deux nombres proposés sans les calculer.

1) $\sqrt{3{,}79}$ et $\sqrt{3{,}8}$
2) $\sqrt{\pi+1}$ et 2

Correction

1) $3{,}79<3{,}8$.
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc $\sqrt{3{,}79}<\sqrt{3{,}8}$.
2) $4<\pi+1$.
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc $\sqrt{4}<\sqrt{\pi+1}$ donc $2<\sqrt{\pi+1}$.

MÉTHODE 1 Résoudre une équation irrationnelle

► Ex. 13 p. 45

On utilise le fait que l'égalité $\sqrt{a}=b$ équivaut à $a=b^2$ et $b\geq 0$.

Exercice d'application

Résoudre l'équation $\sqrt{x-1}=2$.

Correction

On examine les conditions d'existence : $x-1\geq 0$ c'est-à-dire $x\geq 1$.
On résout alors l'équation dans $[1\,;\,+\infty[$.

$$\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x-1=2^2 \Leftrightarrow x-1=4 \Leftrightarrow x=5$$

Cette solution convient car elle appartient à $[1\,;\,+\infty[$, donc $S=\{5\}$.

MÉTHODE 2 Résoudre une inéquation avec racines carrées

► Ex. 14 p. 45

Exercice d'application

Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} > 10^{-3}$.

Correction

On examine les conditions d'existence : $x \geq 0$. On résout dans $[0\,;\,+\infty[$.

$\sqrt{x} > 10^{-3} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 > \left(10^{-3}\right)^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

$\Leftrightarrow x > 10^{-6}$

$S = \left]10^{-6}\,;\,+\infty\right[$

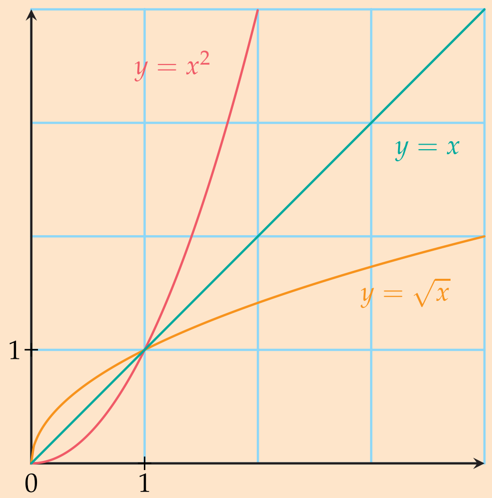
PROPRIÉTÉ : Positions relatives de courbes

- Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$x^2 \leq x \leq \sqrt{x}.$$

- Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$:

$$\sqrt{x} \leq x \leq x^2.$$



PREUVE

1er cas : On suppose que $0 \leq x \leq 1$.
On muliplie chaque membre par x : $x^2 \leq x$.
La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\sqrt{x} \leq \sqrt{1}$ donc $\sqrt{x} \leq 1$.
On multiplie chaque membre par $\sqrt{x}$: $x \leq \sqrt{x}$
2nd cas : On suppose que $1 \leq x$.
On muliplie chaque membre par x : $x \leq x^2$.
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc $\sqrt{1} \leq \sqrt{x}$ donc $1 \leq \sqrt{x}$.
On muliplie chaque membre par $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} \leq x$.

4. Fonction valeur absolue

A. Valeur absolue d'un réel

DÉFINITION : Valeur absolue d'un réel

La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est la distance entre x et zéro. Ainsi :
- $|x| = x$ si x est positif ;
- $|x| = -x$ si x est négatif.

Exemples $|8| = 8$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.
$|\pi - 3| = \pi - 3$ car $\pi - 3$ est positif.
$\left|1 - \sqrt{2}\right| = -\left(1 - \sqrt{2}\right) = -1 + \sqrt{2}$ car $1 - \sqrt{2}$ est négatif.

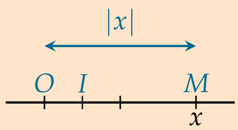
PROPRIÉTÉS

Pour tous les réels x et y :

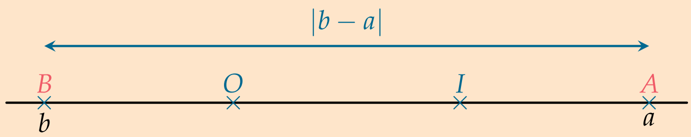
1) $|x| \geq 0$
2) $|-x| = |x|$
3) $\sqrt{x^2} = |x|$
4) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
5) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

PROPRIÉTÉS : Lien avec les distances

On considère la droite des réels munie du repère $(O\ ;\ I)$.
- Si M est un point d'abscisse x, alors $OM = |x|$.



- Si A et B sont deux points d'abscisses respectives a et b, alors $AB = |a - b| = |b - a|$.



Exemple

Une droite est munie d'un repère $(O\ ;\ I)$. Sur cette droite, on considère les points A et B d'abscisses respectives -3 et 2,5. Calculer les distances OA, AB et BI.

Correction

$OA = |x_A - x_O| = |-3 - 0| = 3$
$AB = |x_B - x_A| = |2,5 + 3| = 5,5$
$BI = |x_I - x_B| = |1 - 2,5| = |-1,5| = 1,5$

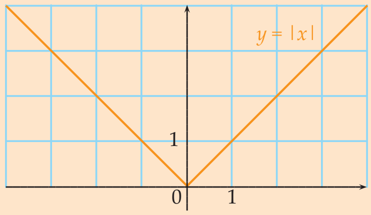
B. Fonction valeur absolue

DÉFINITION

La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

PROPRIÉTÉ

La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.



PREUVE La fonction $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et la fonction $x \mapsto x$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

MÉTHODE 3 Étudier et représenter une fonction avec des valeurs absolues

► Ex. 30 p. 46

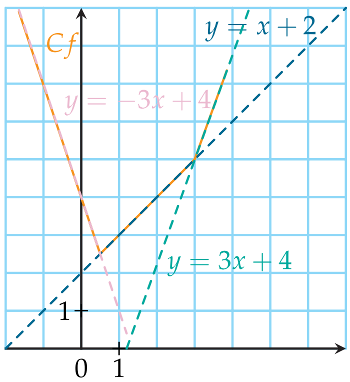
Pour écrire l'expression $|A(x)|$ sans barre de valeur absolue, on cherche le signe de $A(x)$.
Lorsque l'expression $A(x)$ est positive, alors $|A(x)| = A(x)$.
Lorsque l'expression $A(x)$ est négative, alors $|A(x)| = -A(x)$.

Exercice d'application

Écrire sans valeur absolue :
$f(x) = |x-3| + |-2x+1|$.
Puis représenter f.

Correction

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$\|x-3\|$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$\|-2x+1\|$	$-2x+1$	$2x-1$	$2x-1$
$f(x)$	$-3x+4$	$x+2$	$3x-4$



5. Fonctions $u+k$ et ku

DÉFINITION : Fonction $u + k$

Soit u une fonction définie sur un ensemble D et k un réel.
La fonction notée $u+k$ est la fonction définie sur D par $(u+k)(x) = u(x) + k$.

PROPRIÉTÉ

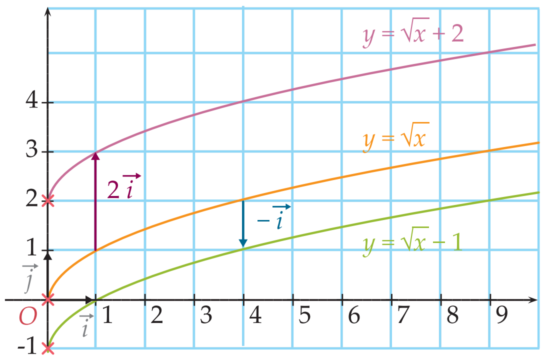
Dans un plan muni d'un repère, la courbe C_{u+k} est l'image de la courbe C_u par la translation de vecteur $k\,\overrightarrow{j}$.

PREUVE Pour tout réel x de l'ensemble D, on note A et B les deux points d'abscisse x appartenant respectivement à C_u et C_{u+k}. L'ordonnée de A est $u(x)$ et celle de B est $u(x)+k$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-x \\ u(x)+k-u(x) \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$. Ainsi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{j}$.

Ainsi, l'ensemble des points de la courbe C_{u+k} est obtenu par translation des points de la courbe C_u de vecteur $k\overrightarrow{j}$.

EXEMPLES : On a représenté ci-dessous les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$, $u+2$ et $u-1$.



PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction monotone sur un intervalle I et k un réel.
Les fonctions u et $u+k$ ont le même sens de variation sur I.

DÉFINITION : Fonction ku

Soit u une fonction définie sur un ensemble D et k un réel.
La fonction notée ku est la fonction définie sur D par $(ku)(x) = k \times u(x)$.

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction monotone sur un intervalle I. Soit k un réel.

- Si $k > 0$, alors les fonctions u et ku ont le même sens de variation sur I.
- Si $k < 0$, alors les fonctions u et ku ont des sens de variation contraires sur I.

PREUVE Dans le cas où u est croissante sur I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. u est croissante I sur donc $u(a) \leq u(b)$.

- Si $k > 0$ alors, en multipliant par k le sens est conservé, on a donc $k \times u(a) \leq k \times u(b)$.

Ainsi la fonction ku est croissante sur I.

- Si $k < 0$ alors, en multipliant par k le sens change, on a donc $k \times u(a) \geq k \times u(b)$.

Ainsi, la fonction ku est décroissante sur I.
Dans le cas où u est décroissante sur I, voir la démonstration à l'exercice 36, p. 47.

Exemple On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$. On dresse le tableau de variations des fonctions u, $4u$ et $-\dfrac{1}{2}u$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$4u(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$-\dfrac{1}{2}u(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

6. Fonction $\sqrt{u}$

DÉFINITION

Soit u une fonction définie sur un ensemble D telle que, pour tout $x \in D, u(x) \geq 0$.
La fonction notée $\sqrt{u}$ est la fonction définie sur D par $\sqrt{u}(x) = \sqrt{u(x)}$.

PROPRIÉTÉ

Si u est une fonction monotone sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \geq 0$, alors la fonction $\sqrt{u}$ a le même sens de variation que u sur I.

PREUVE Dans le cas où u est croissante sur I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. u étant croissante sur I, $u(a) < u(b)$.
De plus, $u(a) \geq 0$ et $u(b) \geq 0$ et la fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $\sqrt{u(a)} \leq \sqrt{u(b)}$.
Ainsi, la fonction $\sqrt{u}$ est croissante sur I.
La démonstration est analogue lorsque u est décroissante sur I.

MÉTHODE 4 Étudier une fonction du type $\sqrt{u}$

► Ex. 39 p. 47

- La racine carrée d'un nombre existe si, et seulement si, ce nombre est positif.
  Pour trouver l'ensemble de définition de $\sqrt{u}$, on utilise :

$$\sqrt{u(x)} \text{ existe } \Leftrightarrow u(x) \text{ existe et est positif.}$$

- On étudie le sens de variation de u, et sur les intervalles où u est positive, u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation.

Exercice d'application

Soit f la fonction telle que :
$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

1) Vérifier que f est définie sur $]-\infty\ ;\ -4] \cup [1\ ;\ +\infty[$.
2) Étudier le sens de variation de f sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Correction

1) $\sqrt{x^2 + 3x - 4}$ existe $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0$.
On recherche les racines de $u(x) = x^2 + 3x - 4$.
$\Delta = 3^2 - 4 \times 1(-4) = 25 = 5^2$.
Le trinôme a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$.
$u(x)$ est du signe de $a = 1$, soit positif sauf entre les racines.
Donc f est bien définie sur $]-\infty\ ;\ -4] \cup [1\ ;\ +\infty[$.

2) $a > 0$ et $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2}$ donc u est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
Donc f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -4]$ et croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

7. Fonction $\dfrac{1}{u}$

DÉFINITION

Soit u une fonction définie sur un ensemble D telle que, pour tout $x \in D$, $u(x) \neq 0$.
La fonction notée $\dfrac{1}{u}$ est la fonction définie sur D par $\dfrac{1}{u}(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

PROPRIÉTÉ

Si u est une fonction monotone sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$ et $u(x)$ garde le même signe sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ a un sens de variation contraire à celui de u sur I.

PREUVE Dans le cas où u est croissante sur I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. u étant croissante sur I, $u(a) \leq u(b)$.
De plus, u ne s'annule pas sur I et garde le même signe.

- Si $u(a) > 0$ et $u(b) > 0$, alors la fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on a $\dfrac{1}{u(a)} \geq \dfrac{1}{u(b)}$. Ainsi, la fonction $\dfrac{1}{u}$ est décroissante sur I.
- Si $u(a) < 0$ et $u(b) < 0$, alors la fonction inverse étant décroissante sur $]-\infty\,;0[$, on a : $\dfrac{1}{u(a)} \geq \dfrac{1}{u(b)}$. Ainsi, la fonction $\dfrac{1}{u}$ est décroissante sur I.

La démonstration est analogue lorsque u est décroissante sur I.

MÉTHODE 5 Étudier une fonction du type $\dfrac{1}{u}$

► Ex. 51 p. 49

Exercice d'application

Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ par :
$f(x) = \dfrac{1}{-2x+10}$.

Correction

On pose $u(x) = -2x + 10$.
Ainsi, pour tout $x \neq 5$, $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.
On commence par étudier le sens de variation et le signe de la fonction u.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$u(x)$	$u(x) > 0$	↘	0	↘	$u(x) < 0$
$f(x)$		↗	‖	↗	

Sur $]-\infty\,;5[$ et sur $]5\,;+\infty[$, u et $\dfrac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires.

Activités mentales

1 Dans chaque cas, calculer l'image du nombre proposé par la fonction racine carrée.

1) 49
2) 100
3) $\dfrac{4}{25}$
4) 10^8
5) 4×10^{-6}

2 Dans chaque cas, donner les antécédents éventuels du nombre proposé par la fonction racine carrée.

1) 3
2) 0
3) $\sqrt{5}$
4) -1
5) 10^{-2}

3 Calculer.

1) $|8|$
2) $|0|$
3) $|-2^2|$
4) $|6-2\pi|$
5) $|\sqrt{2}-1|$

4 Donner la valeur absolue des nombres suivants.

1) -4
2) $(-3)^2$
3) $\sqrt{5}-3$
4) $1-\pi$
5) $2-\sqrt{2}$
6) $(-1)^5$

5 Résoudre les équations.

1) $|x| = 5$ 2) $|x| = \sqrt{2}$ 3) $|x| = -\pi$

6 Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 3$.
Compléter par $<$ ou $>$.

1) $\sqrt{a} ... \sqrt{b}$
2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} ... \dfrac{1}{\sqrt{b}}$
3) $|a| ... |b|$
4) $a^2 ... b^2$
5) $\dfrac{1}{a^2} ... \dfrac{1}{b^2}$
6) $\dfrac{-4}{a^2} ... \dfrac{-4}{b^2}$
7) $\sqrt{a}-1 ... \sqrt{b}-1$
8) $|a-3| ... |b-3|$
9) $|3-a| ... |3-b|$
10) $-2|a| ... -2|b|$

7 Soit u une fonction croissante sur un intervalle I. Donner le sens de variations des fonctions suivantes sur I.

1) $u-2$
2) $u+3$
3) $-3u$
4) $-7u$
5) $-2u+8$
6) $4u-1$

8 Soit u une fonction strictement positive et décroissante sur un intervalle I. Donner le sens de variations des fonctions suivantes sur I.

1) $\dfrac{1}{u}$ 2) $-\dfrac{2}{u}$ 3) $\sqrt{u}$

Fonction racine carrée

9 Comparer sans calculatrice.

1) $0,3$; $\sqrt{0,3}$ et $0,3^2$ 2) $1,2$; $\sqrt{1,2}$ et $1,2^2$

10 Dans chaque cas, déterminer un encadrement de $\sqrt{x}$.

1) $0 < x < 4$
2) $0 \leq x \leq 0,04$
3) $1 \leq x < 9 \times 10^6$

11 Soit x un réel tel que $0 \leq x \leq 9$. Dans chacun des cas, déterminer un encadrement de :

1) $\sqrt{x}-5$
2) $-2\sqrt{x}+1$
3) $\sqrt{10-x}$
4) $\sqrt{\sqrt{x}+1}$
5) $-\sqrt{x^2+19}$

12 Soit a et b deux réels positifs.

1) On pose $X = a^2+b^2$ et $Y = (a+b)^2$. Comparer les réels X et Y en étudiant le signe de leur différence.
2) En utilisant le sens de variation de la fonction racine carrée, démontrer que $\sqrt{a^2+b^2} \leq a+b$.

13 ▶ MÉTHODE 1 p. 38

Résoudre les équations.

1) $\sqrt{x} = 4$
2) $\sqrt{x} = -3$
3) $\sqrt{-3x} = 3$
4) $\sqrt{2x-5} = 9$

14 ▶ MÉTHODE 2 p. 39

Résoudre les inéquations.

1) $\sqrt{x} > 3$ 2) $\sqrt{x} \leq 10^2$ 3) $\sqrt{x} \leq -2$.

15 Résoudre les inéquations.

1) $\sqrt{x^2} < 1$ 2) $\sqrt{x-1} \leq 2$ 3) $\sqrt{x+2} > 3$.

16 Exprimer sans racine carrée au dénominateur.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$
3) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$
4) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Position relative de courbes

17

1) On pose $x = \sqrt{2}-1$.
Sans utiliser de calculatrice, comparer x, $\sqrt{x}$ et x^2.
2) On pose $y = \sqrt{5}-1$.
Sans utiliser de calculatrice, comparer y, $\sqrt{y}$ et y^2.

18 Soit a un réel tel que $1 \leq a \leq 2$.

1) Comparer $a-1$, $\sqrt{a-1}$ et $(a-1)^2$.
2) Comparer $2a-1$, $\sqrt{2a-1}$ et $(2a-1)^2$.

S'entraîner

19 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f(x) = x^2 - 3x - 5 \text{ et } g(x) = -x^2 + x + 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives.

1) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
2) En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

20 Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions :

$f : x \mapsto -3x^2 + 5x + 2$

$g : x \mapsto -x + 2$

21 Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions :

$f : x \mapsto \dfrac{2-x}{x+1}$

$g : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$

22 On considère les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}(2x+1)$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1) Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2) Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé d'unité 4 cm.

Fonction valeur absolue

23 Calculer.

1) $\left|10^{-5} - 10^{-3}\right|$
2) $\left|9 \times 10^4 - 10^5\right|$
3) $\left|-10^{-3}\right|$
4) $|\pi - 4|$
5) $\left|-2 - \sqrt{2}\right|$
6) $|10 - 3\pi|$

24 Calculer la distance entre les réels a et b dans chacun des cas suivants.

1) $a = 7$ et $b = -5$
2) $a = -3$ et $b = -8$
3) $a = -5,1$ et $b = 2,3$
4) $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{8}$
5) $a = 6$ et $b = 2\pi$

25 Calculer.

$A = |2,4 - 0,8| + |7,38 + 0,5| + |1,2 - 5,08|$

$B = \left|\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\right| + \left|\dfrac{2}{3} - 1\right| - \left|\dfrac{4}{3} - 1\right|$

26 Traduire les écritures suivantes par une phrase contenant le mot « distance ».

1) $|x - 8| = 2$
2) $|x| > 1$
3) $|x + 3| = 4$
4) $|x - 0,8| \leq 4$

27 Traduire les phrases à l'aide d'une valeur absolue.

1) La distance de x à zéro est égale à 2.
2) La distance de x à 3 est égale à 5.
3) La distance de x à –3 est strictement inférieure à 1.
4) La distance de x à 2,1 est supérieure ou égale à 3,71.

28 Résoudre les équations.

1) $|2x - 5| = 3$
2) $|x + 3| = 2$
3) $|5 - x| = |x + 1|$
4) $|x^2 - x| = 0$
5) $|1,8x - 3,5| = -2$

29 Résoudre les équations suivantes en se ramenant à des distances. On représentera les solutions sur la droite des réels.

1) $|x - 2| = 3$
2) $|x - 1| = |x + 5|$
3) $|x + 1| \leq 4$
4) $|x - 3| > 2$

30 ► MÉTHODE 3 p. 41

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 1| + 2\,|x + 2|$.

1) Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue, selon les valeurs de x.
2) Représenter graphiquement la fonction f.

31 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 3| - 2\,|x + 1|$.

1) Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue, selon les valeurs de x.
2) Représenter graphiquement la fonction f.
3) Déterminer les antécédents de -2 par f.

32 ALGO

On considère l'algorithme suivant.

```
Variable : x réel
Entrée
Saisir x
Traitement
Si x − 3 ≥ 0
     Alors afficher x − 3
     Sinon afficher 3 − x
Fin Si
```

1) Faire fonctionner cet algorithme pour les valeurs de x suivantes : $-8\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,0\,;\,\pi$ et -3.
2) Pour un nombre réel x quelconque, quel est le résultat affiché en sortie ?
3) Modifier cet algorithme pour qu'il affiche en sortie l'image de x, par la fonction : $x \mapsto |-2x + 5|$.

Fonctions $u+k$ et ku

33 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction u définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.

x	-2		0		4
$u(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

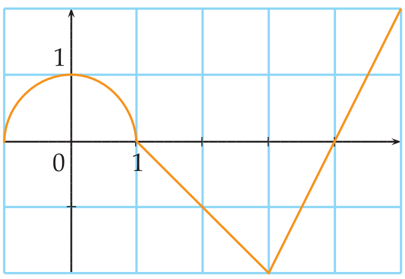
Dresser le tableau de variations des fonctions $f = u - 2$ et $g = u + 3$ sur $[-2\,;\,4]$.

34 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction u définie sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$.

x	-1		0		2		5
$u(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	7

Dresser le tableau de variations des fonctions $f = -3u$ et $g = \dfrac{1}{2}u$ sur $[-1\,;\,5]$.

35 On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$.



Reproduire le graphique et représenter les fonctions : $f+2$; $\dfrac{1}{2}f$ et $-2f$.

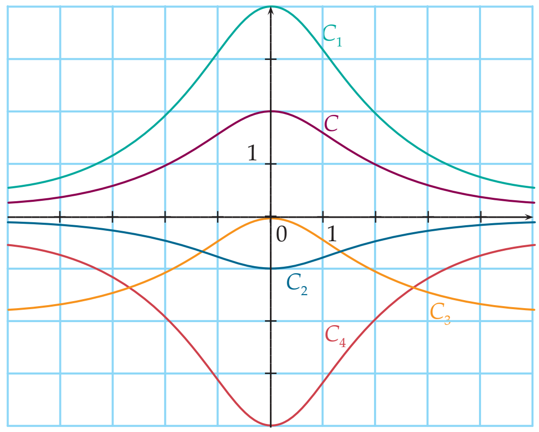
36 **Démonstration du cours**

Voir propriété page 42.

Soit une fonction u définie et décroissante sur un intervalle I. Soit k un réel.

1) On suppose que $k > 0$. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Comparer $u(a)$ et $u(b)$ et en déduire le sens de variation de la fonction ku.
2) On suppose que $k < 0$. Étudier le sens de variation de la fonction ku.

37 On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction u, ainsi que quatre courbes représentant des fonctions du type $u+k$ ou ku.



Associer à chaque courbe C_1, C_2, C_3 et C_4 la fonction déduite de u.

38 Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction racine carrée. En déduire les courbes représentatives des fonctions :

$f : x \mapsto \sqrt{x} - 2$

$g : x \mapsto -2\sqrt{x}$

$h : x \mapsto \dfrac{1}{3}\sqrt{x}$

Fonctions racine carrée et inverse

39 ▶ MÉTHODE 4 p. 43

Soit f la fonction telle que $f(x) = \sqrt{2x - 18}$.

1) Vérifier que f est définie sur $[9\,;\,+\infty[$.
2) Étudier le sens de variation de f sur $[9\,;\,+\infty[$.

40 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction u définie sur l'intervalle $[-3\,;\,5]$.

x	-3		-1		1		5
$u(x)$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

Dresser le tableau de variations de la fonction $\sqrt{u}$ sur $[-3\,;\,5]$.

S'entraîner

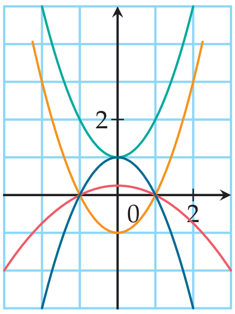
41 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

2) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x + 7}$

42 On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2 - 1$.

Associer chacune des fonctions u, $-u$, $u + 2$ et $-\frac{1}{4}u$ à sa courbe représentative.



43 On donne le tableau de variations d'une fonction u définie sur $[-2\,;\,5]$

x	0		2		6
			9		
$u(x)$		↗		↘	
	4				1

On donne ci-dessous les tableaux de variations de quatre fonctions f, g, h et l déduites de u. Retrouver parmi les fonctions $\sqrt{u}$, $8 \times \frac{1}{u}$, $-\frac{1}{2}u$ et $u - 6$ laquelle est f, g, h ou l.

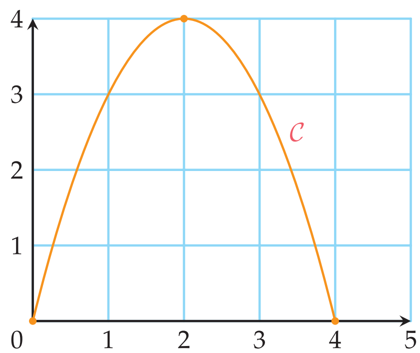
x	0		2		6
	-2				$f(6)$
$f(x)$		↘		↗	
			$f(2)$		

x	0		2		6
			$g(2)$		
$g(x)$		↗		↘	
	-2				$g(6)$

x	0		2		6
			$h(2)$		
$h(x)$		↗		↘	
	2				$h(6)$

x	0		2		6
	2				$l(6)$
$l(x)$		↘		↗	
			$l(2)$		

44 On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction u définie sur $[0\,;\,4]$.



Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions suivantes :

1) f définie sur $[0\,;\,4]$ par $f(x) = -u(x) + 3$.

2) g définie sur $[0\,;\,4]$ par $g(x) = -2\sqrt{u(x)} + 1$.

3) h définie sur $]0\,;\,4[$ par $h(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

45 Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1) $f(x) = \sqrt{-5x + 2}$ sur $\left]-\infty\,;\,\frac{2}{5}\right]$

2) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$

46 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \sqrt{x^2+4}$.

1) Étudier le sens de variation de f.

2) Quel encadrement de $f(x)$ peut-on donner :
a) lorsque $-5 \leq x \leq 2$? **b)** lorsque $-1 \leq x \leq 4$?

47 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 2}$.

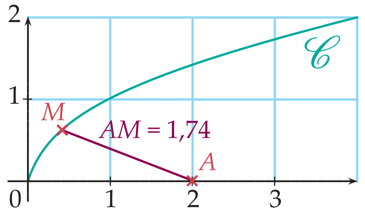
1) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier le sens de variation de la fonction trinôme u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 3x - 2$.

3) En déduire que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

48 INFO

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \sqrt{x}$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.
On note $M\left(x\,;\,\sqrt{x}\right)$ un point de $\mathscr{C}$ et on considère le point $A(2\,;\,0)$.



1) **a)** Construire la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.
b) Déplacer M. Pour quelle position de M la distance AM semble-t-elle minimale ?

2) Vérifier que $AM = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$.

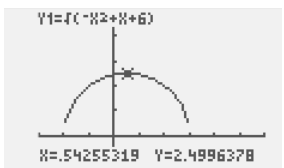
3) Déterminer la position de M telle que AM soit minimale.

49 CALC

Soit la fonction f définie sur $[-2\,;\,3]$ par :
$f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 6}$.

1) Vérifier que f est bien définie sur $[-2\,;\,3]$.

2) À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu le graphique ci-dessous.



a) Conjecturer l'existence d'un maximum pour f.
b) Démontrer cette conjecture.

50 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction u définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

x	0		2		4		6
$u(x)$	4	↘	1	↗	7	↘	2

Dresser le tableau de variations de la fonction $\frac{1}{u}$ sur $[0\,;\,6]$.

51 ► MÉTHODE 5 p. 44

1) Étudier les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -2x^2 + 2x$.

2) En déduire le sens de variation de la fonction $\frac{1}{u}$ sur $]0\,;\,1[$.

52 Dresser le tableau de variations de la fonction u puis celui de $\frac{1}{u}$ dans chacun des cas suivants.

1) $u : x \mapsto x^2 + 4$ **3)** $u : x \mapsto |x| + 1$

2) $u : x \mapsto -(x^2+1)$

53 Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{1}{-3x+1}$ sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{3}\right[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]-\infty\,;\,0[$

4) $f(x) = \dfrac{1}{|x+1|}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$

Études de fonctions

54 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$ (forme A).

1) Montrer que pour tout $x \neq 2$:
$f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-2}$ (forme B).

2) En utilisant la forme la plus adaptée :
a) étudier le sens de variation de la fonction f ;
b) étudier le signe de $f(x)$;
c) résoudre l'inéquation $f(x) \geq 2$.

55 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{-5x+3}{x-2}$.

1) Pour tout réel $x \neq 2$, exprimer $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x-2}$, où a et b sont deux réels à déterminer.

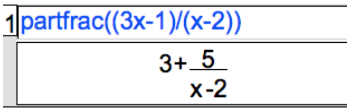
2) En déduire le sens de variation de la fonction f.

S'entraîner

56 INFO

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

1) Justifier l'affichage donné par le logiciel de calcul formel ci-dessous.



2) En déduire le sens de variation de f.

3) On considère la droite D d'équation $y = x + 5$.
Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D.

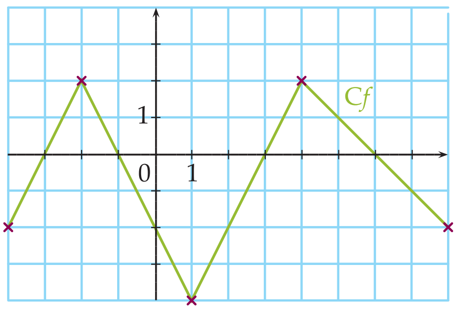
57 Une entreprise fabrique des objets. On considère que le coût total, en euros, pour la fabrication de x objets est $C(x) = 250 + 15x$, avec $1 \leq x \leq 200$.

1) Calculer le coût moyen $C_M(x)$ par objet.

2) Étudier le sens de variation de la fonction C_M sur $[1\,;\,200]$.

3) À partir de quelle quantité produite, le coût moyen par objet est-il inférieur ou égal à 20 € ?

58 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4\,;\,8]$.



Reproduire le graphique et représenter la fonction g définie sur $[-4\,;\,8]$ par $g(x) = |f(x)|$.
Expliquer la démarche.

59 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = |x-2| + |x+1|$.

1) Compléter le tableau suivant avec sur les différents intervalles, des expressions n'utilisant pas de valeurs absolues.

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$				
$\lvert x+1\rvert$				
$f(x)$				

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Tracer la courbe C_f représentative de f dans un repère.

4) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 5$. Vérifier à l'aide du graphique.

5) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) < 4$. Vérifier à l'aide du graphique.

60 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2}$.

1) a) Étudier le sens de variation de f.

b) Étudier le signe de $f(x)$.

c) Représenter f dans un repère.

2) Dans le même repère, représenter la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x)|$, en expliquant la démarche.

61 On considère la fonction f définie sur par :
$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2}$.

1) a) Étudier le sens de variation de f.

b) Étudier le signe de $f(x)$.

c) Représenter f dans un repère.

2) Dans le même repère, représenter la fonction g définie sur par $g(x) = |f(x)|$, en expliquant la démarche.

62 Sur une droite graduée D, on note A, B et M les points d'abscisses respectives : 1 ; -2 et x. On cherche s'il existe une position de M sur D rendant minimal le nombre $2MA + MB$.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2|x-1| + |x+2|$.
Écrire $f(x)$ sans valeur absolue (en distinguant trois intervalles).

2) Tracer la représentation graphique de f et conclure.

63 Dans chaque cas, étudier le sens de variations de la fonction f définie sur l'ensemble indiqué.

1) $f : x \mapsto -5 + \dfrac{3}{x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) $f : x \mapsto \sqrt{5 - x}$ sur $]-\infty\,;\,5]$

3) $f : x \mapsto 4 - |x|$ sur $\mathbb{R}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{-2}{3 - x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

64 Dans chaque cas, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1) $f : x \mapsto -2\,(x - 5) + 1$ sur $\mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto 2 - \sqrt{x - 1}$ sur $[1\,;\,+\infty[$

3) $f : x \mapsto \sqrt{(x - 7)^2}$ sur $\mathbb{R}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{|3 - x|}$ sur $]-\infty\,;\,3[$

65 Résoudre les équations suivantes.

1) $\sqrt{x^2 + 6} = 2x$

2) $\sqrt{x - 1} = x - 3$

3) $\sqrt{8x + 9} = 2x + 1$

66 CALC

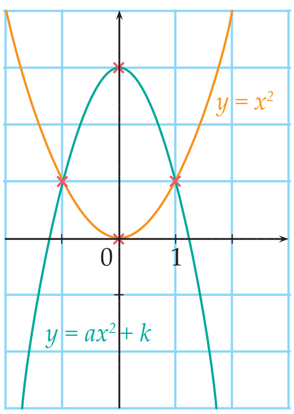
f et g sont les fonctions définies sur $[1;+\infty[$ par :
$f\,(x) = \sqrt{x - 1}$ et $g\,(x) = 4 - x$.

1) Tracer les courbes représentatives de f et de g sur l'écran d'une calculatrice.

2) Donner une valeur approchée de l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.

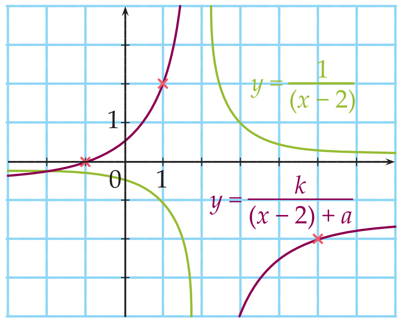
3) Résoudre dans $[1\,;\,+\infty[$ l'équation $f\,(x) = g\,(x)$.

67 On a représenté ci-dessous la fonction carré et la fonction $g : x \mapsto ax^2 + k$ (en bleu), où a et k sont deux réels fixés.



Déterminer les réels a et k.

68 On a représenté ci-dessous les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f\,(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ et $g\,(x) = \dfrac{k}{x - 2} + a$, où a et k sont deux réels fixés.



Déterminer les réels a et k.

69 On donne les définitions suivantes.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

- La **fonction somme** de f et g est la fonction, notée $f + g$ définie sur I par :
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- La **fonction produit** de f par g est la fonction, notée fg, définie sur I par :
  $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) Si f et g sont croissantes sur I, alors $f + g$ est croissante sur I.

2) Si f et g sont croissantes sur I, alors fg est croissante sur I.

70 Soit f et g les fonctions définies sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par $f\,(x) = \sqrt{1 + 2x}$ et $g\,(x) = 1 + x$.

1) Étudier le sens de variation de f et g sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2) Démontrer que pour tout réel $x \geq -\dfrac{1}{2}$: $f\,(x) - g\,(x) = \dfrac{-x^2}{\sqrt{1 + 2x} + 1 + x}$.

3) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g.

a) Démontrer que pour tout réel $x \geq -\dfrac{1}{2}$:
$|f\,(x) - g(x)| \leq 2x^2$.

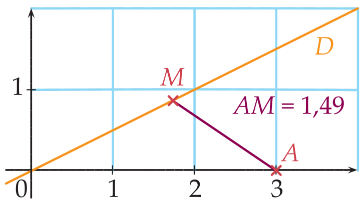
b) En déduire, sans calculatrice, une valeur approchée de $\sqrt{1,002}$.

Approfondir

71 Distance d'un point à une droite INFO

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}x$ et le point $A\,(3\,;\,0)$.
On considère un point M d'abscisse x sur D.

1) Construire la figure sur un logiciel de géométrie dynamique.



Pour quelle position de M la distance AM semble-t-elle être minimale ? Que vaut cette distance ?

2) Montrer que $AM = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - 6x + 9}$.

3) Calculer le minimum de la distance AM.

Note : Ce minimum est appelé distance entre A et D.

72 Fonction cube

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x) = x^3$.

1) Quelles sont les images de 0 ; 2 ; –3 et 10 par f ?

2) Pour tout réel x, comparer $f\,(x)$ et $f\,(-x)$.
En déduire que la courbe de f possède un élément de symétrie.

3) a) Soit a et b deux réels. Montrer que :
$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3 - b^3$.

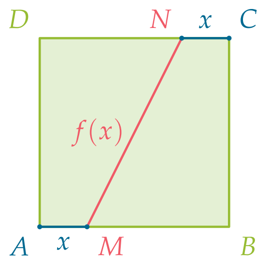
b) En déduire que f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

c) En utilisant le **2)**, montrer que f est aussi croissante sur $]-\infty\,;\,0]$.

4) Représenter f sur $[-2\,;\,2]$.

73

$ABCD$ est un carré de côté 1. M est un point de $[AB]$, N est un point de $[CD]$ tels que $AM = CN$.



On pose $x = AM = CN$. On considère la fonction f qui à x associe $f\,(x) = MN$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

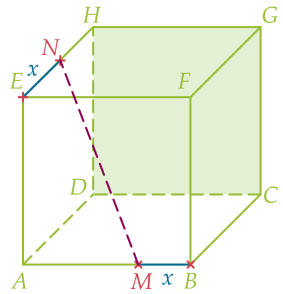
2) Montrer que $f\,(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 2}$.

3) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

4) Encadrer $f\,(x)$.

74 Dans l'espace

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 4. M est le point de l'arête $[AB]$ et N est un point de l'arête $[EH]$ tels que $MB = EN$.
On pose $x = MB = EN$. On considère la fonction f qui à x associe $f\,(x) = MN$.



1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

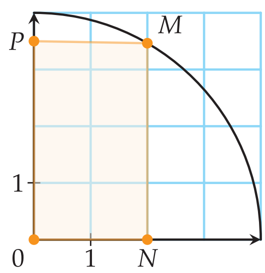
2) Exprimer $f\,(x)$ en fonction de x (on pourra admettre que le triangle EMN est rectangle en E).

3) Étudier le sens de variation de f.

4) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale. Calculer la valeur de ce minimum.

75 INFO

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;I,j)$. On considère le quart de cercle de centre O, de rayon 4, d'extrémités les points de coordonnées $(4\,;0)$ et $(0\,;4)$. M est un point quelconque, d'abscisse x, sur ce quart de cercle.



La parallèle à (Oy) passant par M coupe (Ox) en N et la parallèle à (Ox) passant par M coupe (Oy) en P.
L'objectif de cet exercice est de s'intéresser à l'aire $A(x)$ du rectangle $ONMP$.

1) Construction
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser cette figure.

2) Conjecture
Déplacer le point M. Pour quelle valeur de x, l'aire du rectangle $ONMP$ semble-t-elle maximale ?
Que vaut cette aire maximale ?

3) Démonstration
a) Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;4]$:
$A(x) = \sqrt{16x^2 - x^4}$.
b) Démontrer la conjecture.

76 Salaire d'un ouvrier

Un ouvrier est payé 8 € de l'heure et proportionnellement au temps t (en heures) passé pour exécuter un travail. S'il termine avant le délai prévu de 10 h, il touche, en plus, une prime égale à la moitié du salaire économisé par l'employeur.

1) Vérifier qu'un ouvrier qui finit sa tâche en 9 h gagne 76 €.

2) On note S la fonction définie sur $]0;10]$ qui, à un temps t, associe le salaire total $S(t)$ de l'ouvrier, en euros.
a) Donner l'expression $S(t)$.
b) Étudier le sens de variation de S.

3) f est la fonction définie sur $]0\,;\,10]$ qui, à un temps t, associe le salaire horaire réel $f(t) = \dfrac{S(t)}{t}$ de l'ouvrier.
a) Vérifier que $f(t) = 4 + \dfrac{40}{t}$.
b) Étudier le sens de variation de f.
c) Combien de temps l'ouvrier doit-il passer à exécuter sa tâche, s'il veut au moins doubler son salaire horaire de base ?

77 Math et physique — CALC

Les physiciens ont établi que $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ où T (la période) est en seconde, ℓ en mètre et $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

1) a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\pi\sqrt{\dfrac{x}{9{,}81}}$.
b) Démontrer cette conjecture.

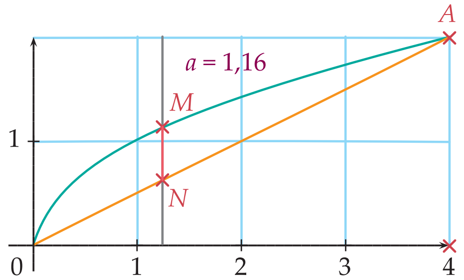
2) Le pendule de Foucault a une longueur de 67 m. Calculer sa période arrondie au centième de seconde.

3) Encadrer la longueur d'un pendule qui a une période comprise entre 5 et 10 s.

Histoire : C'est en 1851 que Léon Foucault (1819-1868) accrocha son pendule à la voûte du Panthéon de Paris. Le pendule met en évidence la rotation de la Terre.

78 Nombre d'or — INFO

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,4]$ par :
$f(x) = \sqrt{x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 4.
Soit x un réel de $[0\,;\,4]$, on note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de $[OA]$ d'abscisse x.



Partie A

1) Construire cette figure sur un logiciel de géométrie dynamique.

2) Afficher la longueur MN. Quelle semble être la position de M pour laquelle cette distance est maximale ?
On note m cette distance maximale.

3) Pour tout réel x de $[0\,;\,4]$, on pose :
$MN = f(x)$.
Montrer que $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{2}x$.

4) Pour tout réel x de $[0\,;\,4]$, montrer que $f(x) - m \leq 0$.
Démontrer la conjecture du **1)**.

Partie B

1) Construire, sur le logiciel, le triangle OMN et afficher son aire. Pour quelle valeur de x non nulle, arrondie au centième, le triangle OMN semble-t-il isocèle en N ?

2) Résoudre algébriquement le problème.

3) Montrer que l'unique solution x_0 peut s'exprimer en fonction de $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ce nombre est appelé le nombre d'or).

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Connaître

- les positions relatives des courbes d'équations $y = x$, $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
- la fonction valeur absolue et la fonction racine carrée.

Étudier

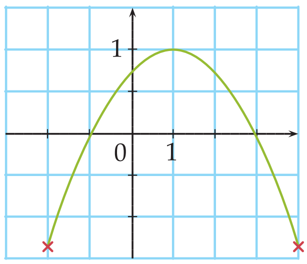
- le sens de variation de fonctions du type $u + k$, ku, $\sqrt{u}$ et $\dfrac{1}{u}$.

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On considère la fonction u définie sur $[-2\,;\,4]$ dont la courbe est donnée ci-contre.



79 La fonction $\sqrt{u}$ est définie sur :

(a) $[-2\,;\,4]$ (b) $[0\,;\,+\infty[$ (c) $[-1\,;\,3]$

80 Sur l'intervalle $[1\,;\,3]$, la fonction $\sqrt{u}$ est :

(a) croissante (b) décroissante (c) on ne sait pas

81 La fonction $\dfrac{1}{u}$ est définie sur :

(a) $[-2\,;\,-1[\cup]-1\,;\,3[\cup]3\,;\,4]$ (b) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (c) $[-2\,;\,4]$

82 Sur l'intervalle $]-1\,;\,1]$, la fonction $\dfrac{1}{u}$ est :

(a) croissante (b) décroissante (c) on ne sait pas

83 Pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, on a :

(a) $\sqrt{x} < x < x^2$ (b) $\sqrt{x} > x > x^2$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x^2}$

84 Pour tout réel x tel que $x > 1$, on a :

(a) $\sqrt{x} < x$ (b) $\sqrt{x} > x$ (c) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

85 Pour tout réel x tel que $2 < x < 4$, on a :

(a) $\dfrac{1}{x} > 0,25$ (b) $x^2 < x$ (c) $\sqrt{x} > \sqrt{2}$ (d) $\sqrt{x} > 2$

Soit u la fonction définie sur par $u(x) = -4x + 3$.

86 La fonction $\sqrt{u}$ est définie sur :

ⓐ $\mathbb{R}$ ⓑ $\mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{4}\}$ ⓒ $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{4}\right]$ ⓓ $\left[\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$

87 La fonction $\sqrt{u}$ est :

ⓐ décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{4}\right]$ ⓑ croissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{4}\right]$ ⓒ décroissante sur $\left[\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$

88 La fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur :

ⓐ $\mathbb{R}$ ⓑ $\mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{4}\}$ ⓒ $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{4}\right]$ ⓓ $\left[\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$

89 La fonction $\frac{1}{u}$ est :

ⓐ décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{4}\right[$

ⓑ croissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{4}\right[$

ⓒ décroissante sur $\left]\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$

ⓓ croissante sur $\left]\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$

90 Pout tout réel x :

ⓐ $|x| = |-x|$ ⓑ $|x| = -|x|$ ⓒ $|-2x| = 2|x|$ ⓓ $|-2x| = -2|x|$

91 L'équation $|x-2| = 3$ a pour solutions :

ⓐ -3 et 3 ⓑ -2 et 2 ⓒ -1 et 5

92 L'équation $|x+1| = |x-3|$ a pour solution(s) :

ⓐ -1 et 1 ⓑ $\frac{1-3}{2}$ ⓒ -1 et 3 ⓓ $\frac{-1+3}{2}$

93 Si $-3 \leq x \leq 4$, alors :

ⓐ $|x| \leq 3$ ⓑ $|x| \leq 4$ ⓒ $|x| > 3$ ⓓ $|x| \geq \frac{1}{4}$

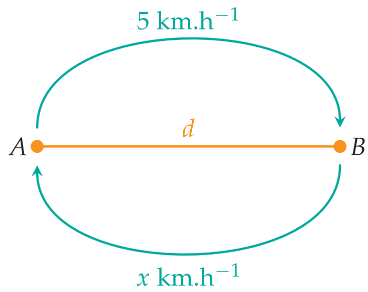
94 Si $-2 \leq x \leq 0$, alors :

ⓐ $|x+2| = x+2$ ⓑ $|x| = -x$ ⓒ $|x+2| = 2-x$ ⓓ $|x| = x-2$

TP 1 Le marcheur

ALGO

1 Vitesse moyenne



Pierre se rend à pied d'un lieu A à un lieu B. À l'aller, il marche à une vitesse moyenne de 5 km.h^{-1}, au retour il marche à une vitesse moyenne de x km.h^{-1} ($x > 0$).

À l'aller, comme au retour, la distance parcourue est la même.

1) On note d la distance entre A et B en km.
Calculer le temps t mis pour l'aller et le temps t' mis pour le retour en fonction de d et de x.

2) Montrer que la vitesse moyenne de Pierre sur le trajet aller-retour est $v(x) = \dfrac{10x}{x+5}$.

2 Étude de la fonction v

1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $v(x) = 10 - \dfrac{50}{x+5}$.

2) En déduire le sens de variation de la fonction v sur $]0\,;\,+\infty[$.

3 Comparaison avec la moyenne des vitesses

Pour tout $x > 0$, on pose $m(x) = \dfrac{5+x}{2}$.

1) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_v$ et $\mathscr{C}_m$. Représenter ces fonctions sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

2) Résoudre graphiquement l'inéquation $|v(x) - m(x)| < 0{,}5$. Interpréter le résultat.

4 Algorithme

On souhaite écrire un algorithme qui donne approximativement une plage sur laquelle $|v(x) - m(x)| < e$.

```
Entrée
Saisir e
Traitement
a prend la valeur 0
Tant que |v(a) - m(a)| > e
    a prend la valeur a + 0,1
FinTantQue
b prend la valeur 10
Tant que |v(b) - m(b)|... e
    b prend la valeur ...
FinTantQue
Sortie
Afficher a et b
```

Compléter cet algorithme.

Le programmer sur une calculatrice ou un logiciel et vérifier les résultats trouvés **partie 3. 2)**.

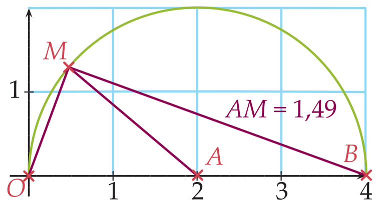
TP 2 Petite ou grande aire ?

INFO

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$.

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

1 Construction avec un logiciel



1) Construire la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2) Placer un point M sur $\mathcal{C}$ et placer le point $A(2\,;0)$.
Afficher la distance AM. Déplacer M. Que constate-t-on ?

3) Quelle conjecture peut-on émettre quant aux variations de y_M lorsque M parcourt $\mathcal{C}$ en partant de O vers $B(4\,;0)$?

4) Construire le triangle ABM et afficher son aire.
Préciser la position de M qui semble donner une aire maximale à ce triangle et donner la valeur de cette aire maximale.

2 Démonstrations

1) Prouver que $\mathcal{C}$ est un demi-cercle de centre A dont on précisera le rayon.

2) Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto -x^2 + 4x$ sur $[0\ ;\ 4]$ et en déduire celui de la fonction f.

3) Pour tout réel de $[0\ ;\ 4]$, on note $g(x)$ l'aire du triangle OBM.
Montrer que $g(x) = 2\sqrt{4x - x^2}$.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction g. Préciser le maximum de g et en quelle valeur il est atteint.

TP 3 Coupe en deux !

ALGO INFO

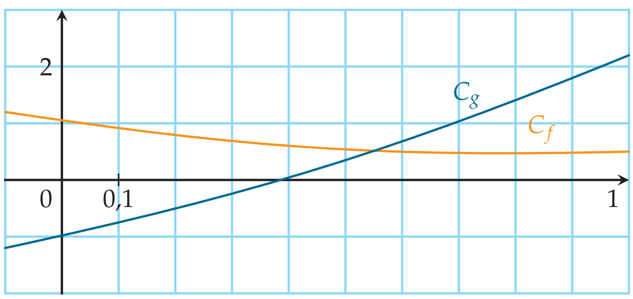
On souhaite résoudre l'équation $x^2 + 2x - 1 = \dfrac{1}{x+1}$ dans $[0\ ;\ 1]$ de manière approchée.

1) Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 1$ sur $[0\ ;\ 1]$.

2) Étudier le sens de variation de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ sur $[0\ ;\ 1]$.

3) **Méthode graphique**

On donne les courbes représentatives des fonctions f et g ci-contre.
On note α la solution de l'équation $f(x) = g(x)$. Par lecture graphique, donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.



Travaux pratiques

4) Méthode par dichotomie

On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Variables : n : entier ;
a, b, m : réels
Entrée
Lire n
Initialisation
a prend la valeur 0
b prend la valeur 1
Traitement
Tant que b - a > 10^(-n) faire
   m prend la valeur (a+b)/2
   Si f(m) < g(m)
      Alors
         a prend la valeur m
   Sinon
      b prend la valeur m
   Fin Si
FinTantQue
Affichage
Afficher a, b
Fin de l'algorithme
```

a) Reproduire et compléter le tableau suivant pour $n = 1$.

	m	$f(m) < g(m)$	a	b	$b - a$	$b - a > 10^{-1}$
Initialisation			0	1	1	oui
Boucle Itération 1	0,5	oui	0,5	1	0,5	oui
Itération 2						

Quel résultat donne cet algorithme ?

b) Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou un logiciel et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-4}.

Récréation, énigmes

À la recherche d'une fonction

On donne la fonction $f : x \mapsto a\sqrt{x+b} + c$ où a, b et c sont des réels fixés. On sait que :

- le plus grand intervalle sur lequel peut être définie f est $[-3\,;\,+\infty[$;
- la fonction f s'annule en 1 ;
- $f(13) = 1$.

Déterminer les réels a, b et c.

ANALYSE 3

Dérivation

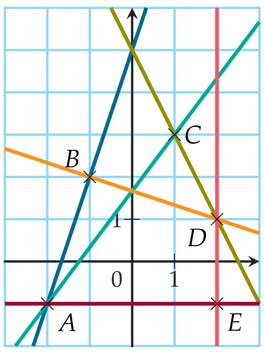
Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Déterminer graphiquement l'équation d'une droite
- Déterminer algébriquement l'équation d'une droite
- Tracer une droite dont on connaît le coefficient directeur
- Caractériser l'appartenance d'un point à une courbe
- Calculer algébriquement une image

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Déterminer graphiquement une équation de chacune des droites représentées ci-dessous sous la forme $y = mx + p$.



2 Déterminer algébriquement une équation de chacune des droites suivantes :

1) (AB) avec $A(-1\,;\,-1)$ et $B(1\,;\,3)$

2) (CD) avec $C(6\,;\,4)$ et $D(1\,;\,2)$

3) (EF) avec $E(-1\,;\,4)$ et $F(2\,;\,2)$

4) (GH) avec $G(2\,;\,2)$ et $H(-2\,;\,4)$

3 Dans tous les cas suivants, tracer la droite dont on donne le coefficient directeur m et passant par le point donné.

1) $m = 3$ et $A(1\,;\,1)$

2) $m = -2$ et $A(1\,;\,1)$

3) $m = \dfrac{2}{3}$ et $B(-2\,;\,2)$

4) $m = -\dfrac{1}{4}$ et $B(-2\,;\,2)$

4

1) Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 7$ définie sur $\mathbb{R}$. Les points suivants appartiennent-ils à $\mathcal{C}_f$?

a) $A(2\,;\,5)$ **b)** $B(-1\,;\,-10)$

2) Même consigne avec la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x-9}$ sur $[4{,}5\,;\,+\infty[$.

a) $C(-1\,;\,-\sqrt{11})$ **b)** $D(5\,;\,1)$

5

1) Soit $f : x \mapsto x^2 + 3x$. Calculer :

a) $f(1+x)$

b) $f(1-x)$

c) $1 - f(x)$

d) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) Même consigne avec $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-7}$.

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Du haut de l'Empire State Building

Une petite pièce, admettant donc peu de résistance à l'air (par exemple un Penny), est lâchée du toit de l'Empire State Building. Est-ce dangereux si quelqu'un la reçoit sur sa tête et quelle est la vitesse de la pièce au moment de l'impact ?

Partie 1 : Approche physique

On donne les informations suivantes :

- hauteur du toit de l'Empire State Building : 381 m ;
- distance (en m) parcourue par un corps en chute libre, sans tenir compte de la résistance de l'air, en fonction du temps (en s) : $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$, où $g \approx 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.

1) Déterminer le temps mis par la pièce pour arriver au sol. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

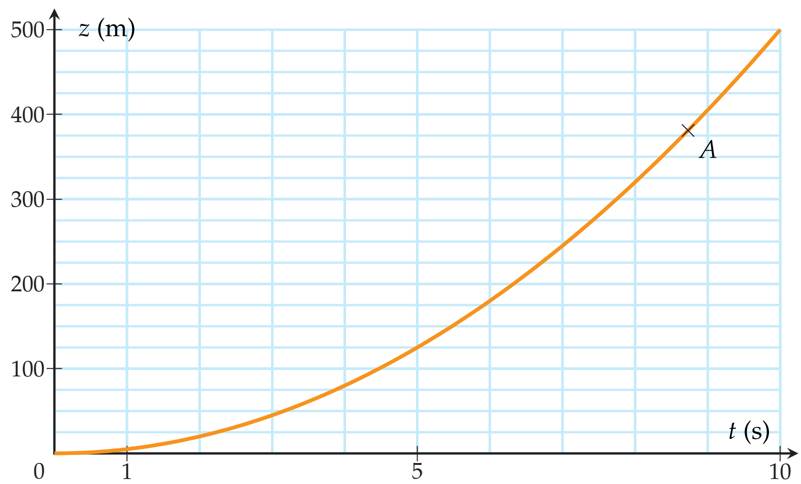
2) a) Calculer la vitesse moyenne de la pièce depuis l'instant du lâcher jusqu'au moment de l'impact, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ puis en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

b) Est-ce une bonne estimation de la vitesse au moment de l'impact ? Si ce n'est pas le cas, expliquer pourquoi et proposer une meilleure estimation.

c) Une fois une bonne estimation trouvée, répondre à la question de la dangerosité.

Partie 2 : Approche mathématique

On donne la représentation graphique de la fonction z dans un repère orthogonal.
Sur cette courbe, on considère le point A d'abscisse 8,73.



1) Étude graphique

a) Soit M le point de la courbe d'abscisse 0. Que représente le coefficient directeur de (AM) ?

b) Même question avec le point M d'abscisse 8, puis 8,5, puis 8,6, puis...

c) Tracer la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe au point A, c'est-à-dire la droite « touchant » localement la courbe une seule fois en A, avec la plus grande précision. Que représente son coefficient directeur ? Le lire le plus précisément possible.

2) Étude algébrique

Le but est de calculer la valeur du coefficient directeur de $\mathcal{T}_A$. Pour cela, on utilise l'expression de la fonction : $z(t) = 5t^2$.

On considère la droite (AM), où M est un autre point de la courbe, « assez proche de A », c'est-à-dire d'abscisse $8,73 + h$, avec h « assez proche de 0 ».

a) La droite (AM) est dite . . . . à la courbe.

b) Exprimer le coefficient directeur de (AM) en fonction de h puis simplifier au maximum l'expression obtenue.

c) Lorsque M se rapproche de A, que se passe-t-il géométriquement pour la droite (AM) ?

d) Lorsque M se rapproche de A, que se passe-t-il numériquement pour h ?

e) En déduire la valeur exacte du coefficient directeur de $\mathcal{T}_A$.

3) Dans le cas général, on considère un point A d'abscisse a.

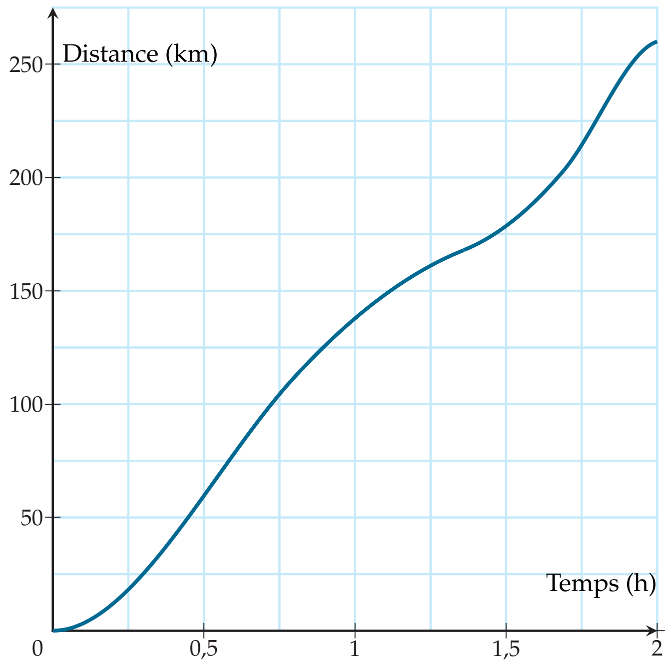
En reprenant le principe d'étude de la question **2)**, déterminer une formule permettant d'obtenir le coefficient directeur de $\mathcal{T}_A$. Que représente-t-il ?

DÉBAT 2 Limitation de vitesse

Un automobiliste parcourt une distance de 260 km sur une autoroute, limitée à $130\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Sur son smartphone est installée une application qui, à l'aide d'un relevé régulier des ses coordonnées GPS, lui permet d'obtenir la distance parcourue en fonction du temps.

Le résultat est représenté sur le graphique ci-contre.



1) Cet automobiliste regarde son graphique et tient le raisonnement suivant : « J'ai parcouru les 260 km en 2 h, soit une moyenne de $130\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, je ne recevrai donc pas d'amende ». Qu'en pensez-vous ?

2) Graphiquement

a) À quel(s) moment(s) sa vitesse était-elle la plus grande ?

b) À quel(s) moment(s) sa vitesse était-elle la plus petite ?

c) À quel(s) moment(s) roulait-il à $130\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$?

Cours - Méthodes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Nombre dérivé et tangente

DÉFINITION : Accroissement moyen

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts appartenant à I. On appelle **accroissement moyen** de f entre x_1 et x_2 la quantité :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1\ ;\ x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

En notant $x_1 = a$ et $x_2 = a + h$ avec $h \neq 0$, on obtient :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

REMARQUE : $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1\ ;\ x_2)$ est le coefficient directeur de la droite sécante à la courbe passant par les points $(x_1\ ;\ f(x_1))$ et $(x_2\ ;\ f(x_2))$.

DÉFINITION : Nombre dérivé

Si, lorsque h se rapproche de 0, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$ se rapproche d'un réel ℓ, alors :

- on dit que la **fonction** f est dérivable en a ;
- le réel ℓ est appelé **nombre dérivé de** f **en** a, que l'on note $f'(a)$.

On écrit alors :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(a).$$

« $\underset{h \to 0}{\longrightarrow} \ldots$ » se lit « **tend vers** ... lorsque h tend vers 0 ».

MÉTHODE 1 Déterminer un nombre dérivé

► Ex. 10 p. 68

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
Déterminer s'il existe $f'(3)$.

Correction

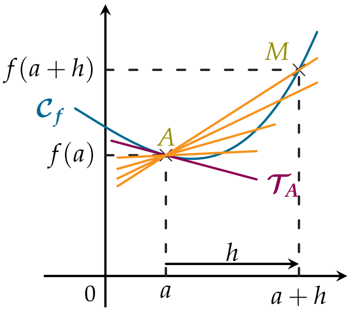
Pour tout $h \neq 0$: $\frac{\Delta f}{\Delta x}(3) = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$ d'où $\frac{\Delta f}{\Delta x}(3) = 6 + h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 6$.
On obtient un nombre réel donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

REMARQUE : $f'(a)$ se note aussi $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$. Le d symbolisant une petite **d**ifférence, en comparaison avec le Δ, symbolisant une grande **D**ifférence.

DÉFINITION : Tangente

Soient A et M deux points distincts d'une courbe. Géométriquement, la **tangente** à la courbe au point A est la position limite de la sécante (AM) lorsque M se rapproche de A.

REMARQUE : Soit a un réel pour lequel f est dérivable et soit $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$. Les deux points $A(a\,;\,f(a))$ et $M(a+h\,;\,f(a+h))$ sont deux points distincts de $\mathcal{C}_f$. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(a)$ représente le coefficient directeur de la droite (AM), sécante à la courbe. On note $\mathcal{T}_A$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.



Lorsque $h \to 0$:

- M se rapproche de A ;
- (AM) se rapproche de $\mathcal{T}_A$;
- $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(a) \to f'(a)$.

PROPRIÉTÉ : Coefficient directeur de la tangente

$f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

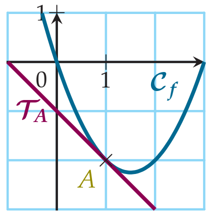
MÉTHODE 2 Déterminer l'équation réduite d'une tangente

► Ex. 12 p. 68

1) On calcule $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(a)$ puis on fait tendre h vers 0.
2) Si f est dérivable en a, la tangente a alors pour équation réduite $y = f'(a)x + p$.
3) On trouve p en utilisant les coordonnées d'un point de la tangente : $A(a\,;\,f(a))$.

Exercice d'application Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

Correction $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(1) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{[(1+h)^2 - 3(1+h)] - [1^2 - 3 \times 1]}{h} = \dfrac{h^2 - h}{h} = h - 1.$

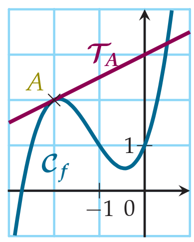


Lorsque $h \to 0$, on a : $h - 1 \to -1$.
f est donc dérivable en 1 et on a $f'(1) = -1$.
Ainsi, $\mathcal{T}_A$ a pour équation $y = -x + p$. On utilise maintenant le point $A(1\,;\,f(1))$, c'est-à-dire $A(1\,;\,-2)$ et on obtient $-2 = -1 + p$, c'est-à-dire $p = -1$. $\mathcal{T}_A$ a donc pour équation réduite $y = -x - 1$.

MÉTHODE 3 Lire graphiquement un nombre dérivé

► Ex. 14 p. 68

Exercice d'application
Soit f une fonction dont on donne la représentation graphique. La droite $\mathcal{T}_A$ est tangente à la courbe au point A d'abscisse -2.
Déterminer graphiquement $f'(-2)$.



Correction $f'(-2)$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}_A$. Graphiquement, on a $f'(-2) = \dfrac{1}{2}$.

PROPRIÉTÉ : Équation réduite de la tangente

Soit f une fonction dérivable en a de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. **L'équation réduite de la tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

PREUVE Si f est dérivable en a, $f'(a)$ est alors par définition le coefficient directeur de la tangente donc son équation est du type $y = f'(a)x + p$. Pour déterminer p, on utilise le point commun à la tangente et à la courbe, c'est-à-dire $A(a\,;\,f(a))$. On obtient alors :

$$f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a.$$

Ainsi, l'équation réduite de la tangente est :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x-a) + f(a).$$

2. Fonction dérivée

DÉFINITION

Si, pour tout réel $a \in I$, $f'(a)$ existe, on dit que f est dérivable sur I.
On définit alors une nouvelle fonction f' sur I par :

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

PROPRIÉTÉ : Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

PREUVE

- Soit $f : x \mapsto mx + p$. Voir exercice 10 p. 68.
- Soit $f : x \mapsto x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 2x.$$

- Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in \mathbb{R}^\star$, on a :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{-\dfrac{h}{x(x+h)}}{h} = -\frac{1}{x(x+h)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x^2}.$$

- Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. Dérivées et opérations

PROPRIÉTÉ : Dérivation : somme et produit

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- La fonction $u+v : x \mapsto u(x)+v(x)$ est dérivable sur I et on a $(u+v)' = u'+v'$.
- La fonction $ku : x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et on a $(ku)' = ku'$.
- La fonction $uv : x \mapsto u(x)v(x)$ est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v+uv'$.

PREUVE Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$. Alors :

- $\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} \underset{h\to 0}{\to} u'(a)+v'(a)$.
- Le deuxième point se traite facilement.
- $\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$

$$= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a) \overbrace{+u(a)v(a+h)-u(a)v(a+h)}^{\text{On ajoute et retranche la même quantité}}}{h}$$

$$= \frac{u(a+h))-u(a)}{h}v(a+h)+u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

$$\underset{h\to 0}{\to} u'(a)v(a)+u(a)v'(a).$$

Exemple

1) $f : x \mapsto \sqrt{x}+x^5$ est de la forme $u+v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^5$. Ainsi :

$$f'(x) = u'(x)+v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}+5x^4.$$

2) $f : x \mapsto 8x^5$ est de la forme ku avec $k = 8$ et $u(x) = x^5$. Ainsi :

$$f'(x) = ku'(x) = 8 \times 5x^4 = 40x^4.$$

3) $f : x \mapsto 8x^5\sqrt{x}$ est de la forme uv avec $u(x) = 8x^5$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Ainsi :

$$f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = 40x^4\sqrt{x}+8x^5\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{40x^4x+4x^5}{\sqrt{x}} = \frac{44x^5}{\sqrt{x}}.$$

PROPRIÉTÉ : Dérivation : inverse et quotient

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I telles que v ne s'annule pas sur I. Alors :

- La fonction $\dfrac{1}{v} : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
- La fonction $\dfrac{u}{v} : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

PREUVE Voir exercice **51** p. 73.

MÉTHODE 4 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

► Ex. 29 p. 70

1) On commence par identifier la forme de la fonction f (somme, produit, inverse, quotient de fonctions usuelles).
2) On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité.
3) On dérive séparément chacune des fonctions composant f.
4) On calcule $f'(x)$ en appliquant les formules de dérivation du cours.

Exercice d'application Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5$
2) $g(x) = x\sqrt{x}$
3) $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
4) $i(x) = \dfrac{x-3}{2x+4}$

Correction

1) f est de la forme $u + v + w$ (somme) avec $u(x) = 7x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $w(x) = 5$.
Ces trois fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f.
De plus, $u'(x) = 7 \times (3x^2) = 21x^2$, $v'(x) = -2 \times (2x) = -4x$ et $w'(x) = 0$.
Ainsi, pour tout réel x :
$$f'(x) = 21x^2 - 4x.$$

2) g est de la forme uv (produit) avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Ces deux fonctions sont définies sur $[0\,;\,+\infty[$ et dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, il en est de même pour g.
De plus, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, pour tout $x > 0$:
$$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

3) h est de la forme $\dfrac{1}{v}$ (inverse) avec $v(x) = x^2 + 1$. v est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais donc h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $v'(x) = 2x$. Ainsi, pour tout réel x :
$$h'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

4) i est de la forme $\dfrac{u}{v}$ (quotient) avec $u(x) = x - 3$ et $v(x) = 2x + 4$. Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ mais v s'annule en -2. Donc i est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
De plus, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2$. Ainsi, pour tout $x \neq -2$:
$$i'(x) = \frac{1 \times (2x+4) - (x-3) \times 2}{(2x+4)^2} = \frac{10}{(2x+4)^2}.$$

Vérification pour les fonctions g et i à l'aide du logiciel de calcul formel Maxima.

```
(%i1) g(x):=x*sqrt(x);
(%o1) g(x):=x√x

(%i2) diff(g(x),x,1);
(%o2) 3√x / 2
```

```
(%i1) i(x):=(x-3)/(2*x+4);
(%o1) i(x):=(x-3)/(2x+4)

(%i5) diff(i(x),x,1), factor;
(%o5) 5 / (2(x+2)^2)
```

Activités mentales

1 Soit f telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = 3$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

2 Le taux d'accroissement en a de la fonction f définie par $f(x) = (x-5)^3$ est égal à :

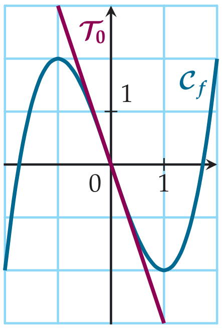
$$h^2 + (3a - 15)h + 3a^2 - 30a + 75.$$

Quel est son nombre dérivé en a ?

3 Quel est le nombre dérivé de :

1) la fonction inverse en 4 ?
2) la fonction carré en -2 ?
3) la fonction racine carrée en $\frac{1}{4}$?
4) la fonction cube en -1 ?

4 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2 ; 2]$, représentée ci-dessous. $\mathcal{T}_0$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en l'origine.



1) Que valent $f(0)$ et $f'(0)$?
2) En quelle(s) valeur(s) le nombre dérivé de la fonction est-il nul ?
3) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il négatif ?
4) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il positif ?

5 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, $A(-1 ; 3)$ un point de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}_A$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A. Déterminer $f'(-1)$ lorsque $\mathcal{T}_A$ passe aussi par le point :

1) $O(0 ; 0)$?   2) $B(1 ; 3)$?   3) $C(2 ; 5)$?

6 Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x^2 + 3$
2) $g(x) = x^3(x+2)$
3) $h(x) = \dfrac{1}{x^4}$
4) $i(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

Nombre dérivé et tangente

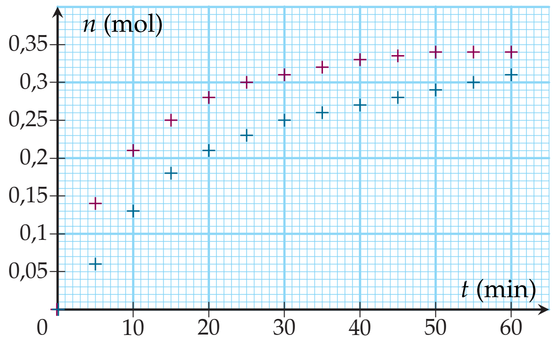
7 Parmi les notions suivantes, déterminer celles qui peuvent s'exprimer comme un nombre dérivé et lorsque c'est le cas, formaliser la notation :

1) le débit instantané d'une chute d'eau ;
2) l'accélération instantanée d'un mobile ;
3) la hauteur d'eau d'une rivière en un temps et lieu donnés ;
4) l'intensité du courant électrique dans un fil ;
5) le nombre de voitures par heure sur une route en un lieu donné ;
6) la vitesse moyenne d'un véhicule sur un trajet ;
7) la vitesse instantanée d'un véhicule en un lieu donné.

8 La vitesse indiquée par les radars pédagogiques ou les radars automatiques (sur les avis de contravention) est-elle une vitesse moyenne ou une vitesse instantanée de la voiture visée ? Argumenter.

9 **Cinétique chimique**

On réalise deux expériences d'une même réaction chimique. Voici un diagramme représentant la quantité de matière (en mol) d'un composé en fonction du temps (en min) dans les deux expériences.



1) Quelle est la réaction chimique la plus rapide ?
2) Graphiquement, et pour chaque expérience, quelle est la vitesse d'apparition du composé à l'instant :
   a) $t = 15$ min ?   c) $t = 45$ min ?
   b) $t = 30$ min ?   d) $t = 60$ min ?
3) L'une des réactions chimiques utilise un catalyseur. Laquelle et pourquoi ?
4) On peut voir qu'au bout de 60 min, la quantité de matière du composé étudié n'est pas la même dans les deux expériences. Expliquer.

S'entraîner

10 ▶ MÉTHODE 1 p. 62

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$, où a est un réel donné, puis déterminer si f est dérivable en a. Lorsque c'est le cas, donner $f'(a)$.

1) $f(x) = 2x - 7$, $a = 3$
2) $f(x) = mx + p$, $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, a réel quelconque
3) $f(x) = -3x^2$, $a = 2$
4) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$, $a = 1$
5) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $a = 1$

11 Même consigne qu'à l'exercice **10**.

1) $f(x) = -x^2 + 7x$, $a = 2$
2) $f(x) = x^3$, $a = 4$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $a = -2$
4) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$, $a = 4$

12 ▶ MÉTHODE 2 p. 63

Dans chacun des cas suivants, déterminer, lorsque cela est possible, l'équation réduite de la tangente en a sous la forme $y = mx + p$.

1) $f : x \mapsto -x^2 + x + 1$, $a = -1$
2) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = 4$
3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = 0$
4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $a = -2$

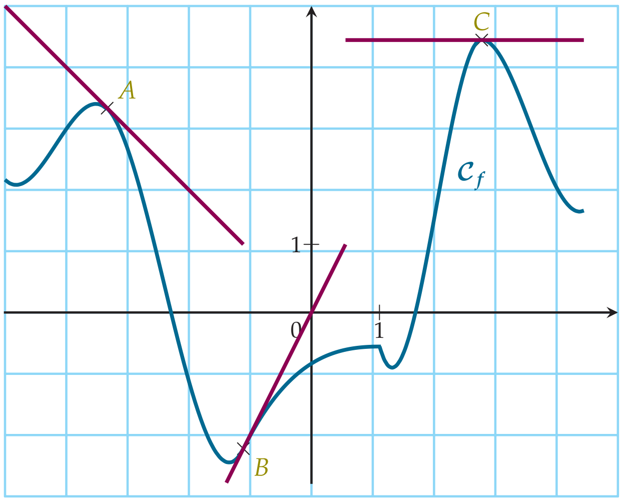
13 Même consigne qu'à l'exercice **12**.

1) $f : x \mapsto 3x^2 - x - 1$, $a = 2$
2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $a = -1$
3) $f : x \mapsto x^3$, $a = 2$
4) $f : x \mapsto x^2 + x + 1$, $a = 0$

14 ▶ MÉTHODE 3 p. 63

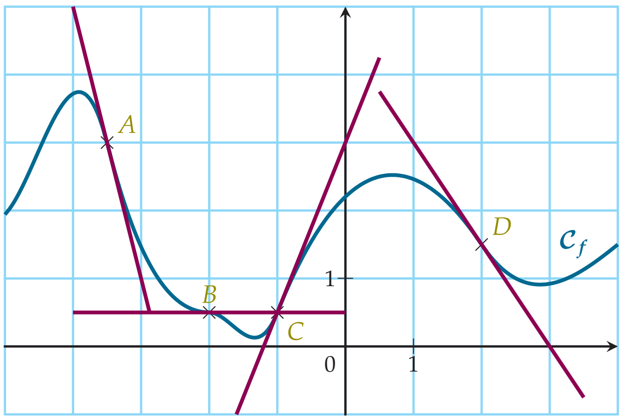
On considère la fonction définie par la courbe ci-après et certaines des tangentes à la courbe.

1) Dans chacun des cas suivants, donner $f(a)$ et $f'(a)$.
   a) $a = -3$
   b) $a = -1$
   c) $a = \dfrac{5}{2}$
2) Donner, si possible, un réel a en lequel f n'est pas dérivable. Justifier brièvement.



15 Même consigne qu'à l'exercice **14**.

1) $a = -3{,}5$
2) $a = -2$
3) $a = -1$
4) $a = 2$



16 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On donne, pour certaines valeurs de x, la valeur de $f(x)$ et le nombre dérivé de f en x.

x	-2	0	3	5
$f(x)$	-2	-1	4	2
$f'(x)$	-1	1	0	-2

Donner une allure possible de la courbe.

17 Même consigne qu'à l'exercice **16**.

x	1	3	5	7
$f(x)$	-2	0	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$	$\frac{3}{7}$	4	0	-3

18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Démontrer que, pour tout réel a, $f'(a) = 2a + 3$.

2) Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.

3) Existe-t-il une tangente en un point de $\mathcal{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y = -2x + \sqrt{17}$?

4) Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact entre cette tangente et $\mathcal{C}_f$.

19 Voici une capture d'écran du logiciel Maxima.

```
(%i1) f(x):=1/(x+3);
(%o1) f(x):= 1/(x+3)

(%i2) (f(a+h)-f(a))/h, ratsimp;
(%o2) - 1/((a+3)h+a^2+6a+9)
```

1) En utilisant la réponse « %o2 » du logiciel, donner l'expression de $f'(a)$.

2) Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 5$? Si oui, préciser les coordonnées du point de contact.

20 On considère la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

1) Graphiquement :

a) pourquoi f n'est-elle pas dérivable en 0 ?

b) que vaut $f'(0)$ « à gauche de 0 », « à droite de 0 » ?

2) Algébriquement :

a) Vérifier que $\frac{\Delta f}{\Delta x}(0) = \frac{|h|}{h}$.

b) En distinguant les cas $h > 0$ et $h < 0$, retrouver les résultats des questions **1)a)** et **b)**.

21 Soit $f : x \mapsto x|x|$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
Démontrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

22 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que f n'est pas dérivable en 0.

23 **Calcul numérique d'un nombre dérivé** ALGO

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et a, un réel appartenant à I. On souhaite, pour évaluer numériquement $f'(a)$, calculer des valeurs de $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$ pour des valeurs de h de plus en plus proches de 0, par exemple : $\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, -\frac{1}{100} \dots$

1) On propose l'algorithme suivant :

```
Liste des variables utilisées
   a, k, TDroite, TGauche : nombre
   f : fonction
Entrées
   Demander a
   Demander f
Traitement
   Pour k variant de 1 à 10 faire
      Donner à TDroite la valeur de ...
      Donner à TGauche la valeur de ...
   Affichage
      Afficher TDroite
      Afficher TGauche
   Fin Pour
Fin de l'algorithme
```

a) Quelles valeurs de h correspondent au calcul de TDroite, coefficient directeur de la sécante lorsque M est à droite de A ? de TGauche ?

b) Compléter alors cet algorithme.

2) Tester l'algorithme dans chacun des cas suivants à l'aide d'un logiciel adapté puis, selon les résultats affichés, dire si f est dérivable en a.

a) $f : x \mapsto x^2$ et $a = 3$

b) $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $a = 4$ puis $a = 0$. (Pourquoi ne faudra-t-il pas calculer TGauche pour $a = 0$?)

Fonctions dérivées

24 Dans chacun des cas suivants :

1) donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f ;

2) calculer $f'(a)$ à l'aide des formules de dérivation du cours ;

3) déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

a) $f : x \mapsto x^3$, $a = -2$

b) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = \frac{1}{4}$

c) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $a = \frac{1}{2}$

d) $f : x \mapsto x^4$, $a = -2$

e) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = 1$

f) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $a = 4$

S'entraîner

25 INFO

Pour $x > 0$, on considère la branche d'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$. Soit M un point de $\mathcal{H}$ d'abscisse a et $\mathcal{T}_M$ la tangente à $\mathcal{H}$ en M.

Cette tangente coupe l'axe des ordonnées en un point A et l'axe des abscisses en un point B.

1) Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique. Quelle conjecture peut-on émettre sur les points A et B ?
2) Déterminer les coordonnées des points A et B en fonction de a et vérifier la conjecture émise.
3) En déduire que l'aire du triangle OAB est constante et donner sa valeur.

26 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et k un réel strictement négatif.

1) Démontrer qu'il existe exactement deux points de $\mathcal{H}$, dont on donnera les coordonnées, en lesquels les tangentes à $\mathcal{H}$ ont pour coefficient directeur k.
2) Que peut-on dire de ces deux points ?

27 On se propose de déterminer la formule de la dérivée de la fonction cube.

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ est une factorisation remarquable connue ; on cherche ici à factoriser $a^3 - b^3$. Compléter $a^3 - b^3 = (a-b)(\ldots + \ldots + \ldots)$.
2) En s'appuyant sur les démonstrations du cours, en déduire que, si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$.

28

1) Pour tous réels a et b, factoriser $a^4 - b^4$.
2) En déduire que pour tout réel x, si $f(x) = x^4$ alors $f'(x) = 4x^3$.

Dérivées et opérations

29 ► MÉTHODE 4 p. 66

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée.

1) $f : x \mapsto x^{1000} - 4x + 1$
2) $f : x \mapsto (x+1)\sqrt{x}$
3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
4) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$

30 Même consigne qu'à l'exercice **29**.

1) $f : x \mapsto 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$
2) $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$
3) $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^3+1}$
4) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

31 Même consigne qu'à l'exercice **29**.

1) $f : x \mapsto -x^2 - 2\sqrt{x}$
2) $f : x \mapsto (x^2-3)^2$
3) $f : x \mapsto -\dfrac{3}{x^2}$
4) $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{-2x+5}$

32 Même consigne qu'à l'exercice **29**.

1) $x : t \mapsto t^2 + 2\sqrt{t}$
2) $u : x \mapsto (x^3 - x)(x^2 - 1)$
3) $f : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
4) $g : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$

33 Même consigne qu'à l'exercice **29**.

1) $y : t \mapsto t + \dfrac{1}{t}$
2) $g : x \mapsto \sqrt{x}(2x+3)$
3) $f : x \mapsto \dfrac{6}{x^2-4}$
4) $h : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x-x^2}$

34 Même consigne qu'à l'exercice **29**.

1) $f : x \mapsto x^2 - \dfrac{1}{x}$
2) $f : u \mapsto (u^2 + 2u + 1)^2$
3) $f : x \mapsto \dfrac{-1}{-7x+4}$
4) $k : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+1}$

35 Même consigne qu'à l'exercice **29**.

1) $f : x \mapsto \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}$
2) $f : x \mapsto (\sqrt{x}+1)^2$
3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
4) $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+x}{4x+1}$

36 Même consigne qu'à l'exercice **29**.

1) $f : x \mapsto (1-x)^2$
2) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
3) $x : t \mapsto \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2} + 1$
4) $C : q \mapsto \dfrac{q^2 - 2q + 1}{q+1}$
5) $H : \omega \mapsto \dfrac{R\omega}{1-\omega^2}$
6) $i : R \mapsto \dfrac{CR^2\omega}{1-LR}$

37 Toutes les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$.

1) Rappeler les dérivées de $f : x \mapsto x$ et de $f : x \mapsto x^2$.
2) Soit $f : x \mapsto x^3$. En remarquant que $x^3 = xx^2$, déterminer $f'(x)$.
3) Soit $f : x \mapsto x^4$. En remarquant que $\ldots$, déterminer $f'(x)$.
4) Soit $f : x \mapsto x^5 \ldots$
5) Continuer tant que vous ne savez pas répondre la question suivante.
6) Pour tout $n \geq 0$, conjecturer la dérivée de $f : x \mapsto x^n$.

> Cette formule, bien que vraie, N'est PAS démontrée, il ne s'agit pour l'instant que d'une conjecture. La suite de la démonstration sera faite en classe de Terminale.

38 En reprenant le même principe qu'à l'exercice **37**, conjecturer une formule donnant la dérivée de la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}^\star$:

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^n}, \quad n \geq 1$$

39 ALGO

On souhaite écrire un algorithme affichant, pour une fonction, sa dérivée et un réel a donnés, le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a. Compléter le squelette de l'algorithme suivant.

```
Liste des variables utilisées
    ... : ...
Entrées
    Demander ...
Traitement
    Donner à m la valeur de ...
    Donner à p la valeur de ...
Affichage
    Afficher ...
    Afficher ...
Fin de l'algorithme
```

40 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

1) $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ définie sur $\mathbb{R}$, $a = -1$
2) $f : x \mapsto \frac{x-2}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $a = 2$
3) $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $a = \frac{1}{3}$

41 Même consigne qu'à l'exercice **40**.

1) $f : x \mapsto 4x^2 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$, $a = 0$
2) $f : x \mapsto \frac{3x+1}{2-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, $a = -1$
3) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$, $a = 1$

42 Soit $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1) Existe-t-il des points de la courbe dont la tangente a pour coefficient directeur $\frac{1}{4}$? Si oui, les déterminer.
2) Existe-t-il un point de la courbe dont la tangente a un coefficient directeur négatif ?
Si oui, le déterminer.

43 **Choisir la meilleure forme**

1) Soit $f : x \mapsto (x+1)(x^2+3)$ définie sur $\mathbb{R}$.
   a) Dériver f en la considérant comme un produit.
   b) Développer et réduire $f(x)$ puis dériver f.
   Comparer les méthodes.
2) Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
   a) Dériver f en la considérant comme un quotient. Simplifier au maximum l'expression de $f'(x)$ obtenue.
   b) Simplifier $f(x)$ puis dériver f. Comparer les méthodes.
   c) Avec le logiciel Maxima, on a obtenu le résultat suivant. Commenter.

```
(%i1) f(x):=sqrt(x)/x;
(%o1) f(x):=√x/x
(%i2) diff(f(x),x,1);
(%o2) -1/(2 x^(3/2))
```

3) Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$.
   a) Dériver f en la considérant comme un quotient.
   b) Simplifier $f(x)$ puis dériver f. Comparer les méthodes.
   c) Avec le logiciel Maxima, on a obtenu le résultat suivant. Commenter.

```
(%i1) f(x):=(x^3-3*x^2+2*x-1)/x;
(%o1) f(x):=(x^3-3 x^2+2 x-1)/x
(%i2) diff(f(x),x,1);
(%o2) (3 x^2-6 x+2)/x - (x^3-3 x^2+2 x-1)/x^2
```

44 INFO

On considère la fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + bx + 1$, $b \in \mathbb{R}$ et (d) la droite d'équation $y = -4x + 10$.

1) Existe-t-il un réel b tel que (d) soit tangente à $\mathcal{C}_f$? Si oui, quel est le point de contact entre $\mathcal{C}_f$ et (d) ?
2) Dans un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur b puis représenter f ainsi que (d). Émettre une conjecture quant au problème posé.
3) Répondre algébriquement au problème.

45 On considère la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois réels.

1) Déterminer a, b et c dans chacun des cas suivants :

a) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 2x + 3$ et $\mathcal{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(3\,;\,6)$;

b) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 5 a pour équation $y = 3x - 3$ et la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -5 a pour équation $y = -x - 3$.

2) Question ouverte

Étant donnés deux points et deux droites de coefficients directeurs donnés passant par chacun de ces deux points, discuter la possibilité de trouver une parabole admettant ces droites comme tangentes en ces points.

46 On considère la fonction $f : x \mapsto ax + \dfrac{b}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$, où a et b sont deux réels non nuls.

Déterminer a et b dans chacun des cas suivants :

1) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 3x - 2$;

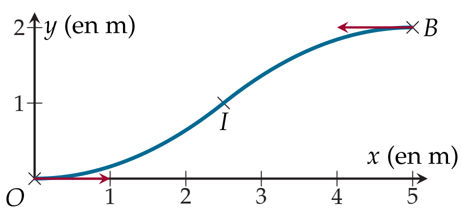
2) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en -1 et l'axe des abscisses en -2.

47 On considère la fonction $f : x \mapsto ax + b\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$, où a et b sont deux réels non nuls.

Si la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses, quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?

48 **Raccordement de courbes (1)**

Pour faire franchir à des chariots une marche de 2 m de haut sur une distance horizontale de 5 m, on cherche à construire un toboggan, comme représenté ci-dessous.



On note I le milieu de $[OB]$. Les arcs $\overset{\frown}{OI}$ et $\overset{\frown}{IB}$ sont deux arcs de paraboles représentant respectivement deux fonctions f et g. Sur $\left[0\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$, on pose $f(x) = ax^2 + bx + c$ et sur $\left[\dfrac{5}{2}\,;\,5\right]$, $g(x) = dx^2 + ex + f$.

1) À l'aide des renseignements fournis par la figure, déterminer les valeurs de a, b et c.

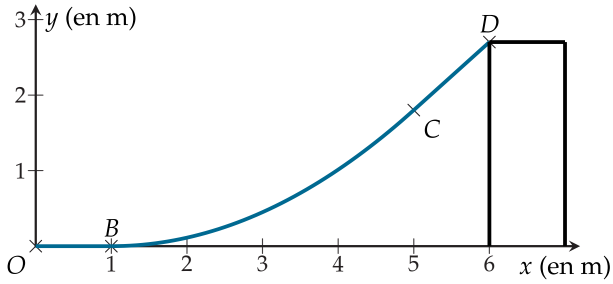
2) a) On souhaite que le raccordement se fasse sans cassure en I. Traduire algébriquement cette information.

b) Déterminer alors les valeurs de d, e et f.

49 **Raccordement de courbes (2)**

Une rampe de skateboard est modélisée de la manière suivante :

- une partie horizontale sur l'intervalle $[0\,;\,1]$;
- un arc de parabole sur l'intervalle $[1\,;\,5]$ représentant la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$;
- un segment de droite sur l'intervalle $[5\,;\,6]$ avec $C(5\,;\,1{,}8)$ et $D(6\,;\,2{,}7)$;
- le raccordement aux points B et C se fait sans cassure.



À l'aide des renseignements fournis, déterminer les valeurs de a, b et c.

50 **Positions relatives courbe / tangente**

Dans chacun des cas suivants :

1) préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de de f ;

2) déterminer l'équation réduite de $\mathcal{T}_a$, tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a ;

3) étudier les positions relatives de $\mathcal{T}_a$ et $\mathcal{C}_f$.

a) $f : x \mapsto x^2 + 4x + 1$, $a = 2$

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$, $a = 1$

c) $f : x \mapsto x^3 - 2x$, $a = 0$

d) $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x + 3$, $a = 0$

e) $f : x \mapsto x^4 - 2x^2 - x + 1$, $a = -1$

f) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$, $a = 0$

g) $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - x + 1$, $a = 2$. Pour l'étude des positions relatives, on pourra factoriser l'expression $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ à l'aide d'un logiciel.

51 Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur I.

1) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$.

a) Soit $x \in I$. Démontrer que :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{v(x) - v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}.$$

b) En déduire $f'(x)$.

2) Soit $g : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

En écrivant $g(x)$ comme un produit et en utilisant les propriétés de dérivation déjà établies, déterminer $g'(x)$.

52 Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Démontrer que $(u^2)' = 2uu'$.

53 Logique

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et a un réel. Dans chacun des cas suivants, dire si :

- $P \Longrightarrow Q$;
- $Q \Longrightarrow P$;
- $Q \Longleftrightarrow P$.

S'il n'y a pas d'implication, on donnera un contre-exemple.

1) P : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ »
Q : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$ »

2) P : « $f(a) = g(a)$ »
Q : « $f'(a) = g'(a)$ »

3) P : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$ »
Q : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x)$ »

4) P : « Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + k$ »
Q : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x)$ »

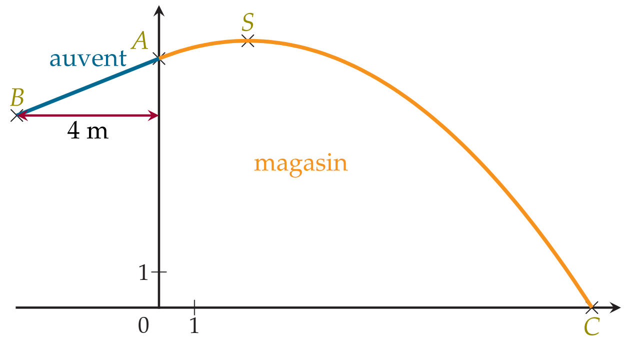
Problèmes

54 Un magasin possède un toit parabolique. Le propriétaire veut prolonger ce toit par un auvent rectiligne devant l'entrée de son magasin pour abriter ses clients les jours de pluie. On modélise la situation par le schéma ci-après, représentant le magasin en vue de profil.

On donne $A(0\,;7)$, $S\left(\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{15}{2}\right)$. Le prolongement entre le toit et l'auvent se fait sans cassure.

1) À l'aide des données de l'énoncé, déterminer l'équation de l'arc de parabole $\overset{\frown}{ASC}$.

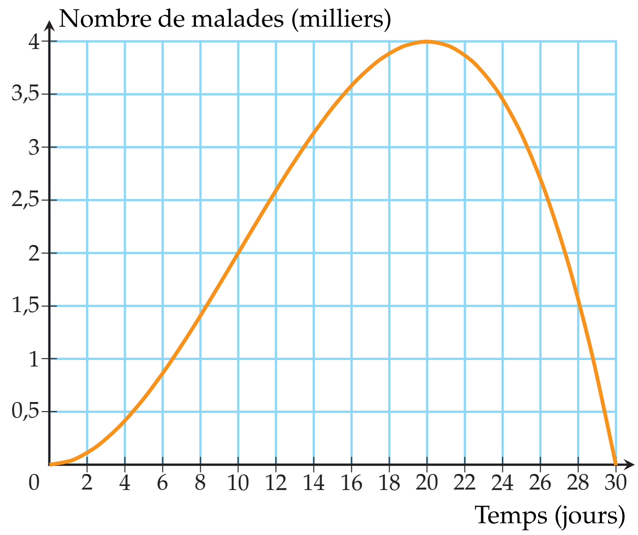
2) En déduire les coordonnées du point B puis la longueur AB.



55 Propagation d'une maladie

L'objectif de cet exercice est d'étudier la vitesse de propagation d'une maladie.

Le nombre de malades en fonction du temps t, exprimé en jours, peut être modélisé par la fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;30]$ par $f(t) = -t^3 + 30t^2$.



1) Déterminer la vitesse moyenne de propagation entre le déclenchement de la maladie (0e jour) et le 10e jour.

2) Graphiquement

a) Quel semble être le jour où la maladie a atteint son pic ?

b) Quelle est alors la vitesse de propagation de la maladie ce jour-là ?

c) À partir de quel jour la vitesse de propagation de la maladie diminue-t-elle ?

3) Algébriquement

a) Calculer $v(t) = f'(t)$.

b) Étudier ses variations et retrouver les résultats établis dans la question **2)**.

S'entraîner

56 **Économie : coût marginal**

Une entreprise fabrique des biens. On note q la quantité de biens produits et on admet que le coût de fabrication, en milliers d'euros, de q unités est donné par :

$$C(q) = -\frac{q^2}{100\,000} + \frac{q}{10} + 1.$$

1) Un exemple :

a) Donner le coût de fabrication de 1 000 unités puis de 1001 unités.

b) En déduire le coût de fabrication de cette unité supplémentaire.

2) On appelle « coût marginal au rang q » la différence $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ qui représente donc le coût induit par la production d'une unité supplémentaire lorsque q unités sont déjà fabriquées.

a) Exprimer $C_m(q)$ comme un taux d'accroissement.

b) Calculer $C_m(q)$ et vérifier que l'on retrouve bien la réponse à la question **1)b)**.

3) En pratique, on ne calcule pas $C_m(q)$ comme ci-dessus mais on prend $C'(q)$ comme valeur approchée du coût marginal au rang q.

a) Justifier mathématiquement cette approximation.

b) Calculer $C'(q)$.

c) En déduire l'erreur commise en assimilant $C_m(q)$ à $C'(q)$.

d) Vérifier, en calculant $C'(1\,000)$, que l'on retrouve environ le résultat de la question **1)b)**.

57 On jette une pierre dans un lac qui produit alors des ondes concentriques à la surface de l'eau. Si le rayon de l'onde croît à une vitesse de 5 m·s^{-1}, à quelle vitesse croît la surface (circulaire) de cette onde lorsqu'elle a atteint un rayon de 12 m ?

58 On considère une flaque d'eau circulaire de 1 mm d'épaisseur crée par un robinet qui fuit. On note $R(t)$ le rayon (en cm) de la flaque en fonction du temps t (en s) et $V(t)$ le volume correspondant (en cm^3).

1) Donner la relation entre $V(t)$ et $R(t)$.

2) En déduire la relation entre $V'(t)$ et $R'(t)$. Que représentent physiquement $R'(t)$ et $V'(t)$?

3) Sachant que le robinet fuit à un débit de 1 cm^3·s^{-1}, déterminer la vitesse d'augmentation radiale de la flaque lorsque celle-ci a atteint un volume de 2 cm^3.

59 **Économie : élasticité**

En économie, l'élasticité mesure la variation d'une grandeur provoquée par la variation d'une autre grandeur. Plus précisément, notons q la quantité de biens achetés (demandés) par les consommateurs et p le prix de vente de ces biens. On suppose que, lorsque p varie de p_D à p_A, q varie de q_D à q_A. L'élasticité-prix de la demande est alors :

$$E = \frac{\dfrac{\Delta q}{q}}{\dfrac{\Delta p}{p}} = \frac{\dfrac{q_A - q_D}{q_D}}{\dfrac{p_A - p_D}{p_D}}.$$

1) Dans chacun des cas suivants, calculer E :

a) le prix a baissé de 3 %, la demande a augmenté de 6 % ;

b) le prix a augmenté de 5 %, la demande a baissé de 10 % ;

c) la demande a augmenté de 15 %, le prix a augmenté de 5 %.

2) Si l'élasticité vaut 4 et que le prix augmente de 2 %, quelle est l'évolution de la demande ?

3) On suppose maintenant que la demande évolue en fonction du prix affiché : $q = f(p)$.

a) Démontrer que si le prix varie de p à $p+h$, alors :

$$E = \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \times \frac{p}{f(p)}.$$

b) À quelle condition peut-on faire l'approximation suivante :

$$E \approx f'(p) \times \frac{p}{f(p)}.$$

60 Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Démontrer qu'en $a = 0$, f est dérivable à droite, mais pas à gauche.

61 Soit $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.

1) Étude graphique

Représenter f. Semble-t-elle dérivable en 0 ? Si oui, quelle semble être la valeur de $f'(0)$?

2) Étude théorique

a) D'après une propriété du cours, que l'on précisera, sur quel intervalle f est-elle dérivable ?

b) Déterminer alors $f'(x)$ sous la forme $k\sqrt{x}$ où k est une constante réelle à préciser.

c) Cette dernière formule permet-elle d'affirmer que $f'(0) = 0$?

d) En revenant à la définition du nombre dérivé, étudier la dérivabilité de f en 0.

3) Point de logique

« f et g sont dérivables en a » est-elle une condition nécessaire ou suffisante à « fg est dérivable en a » ?

62 **Approximation affine**

D'après la définition, lorsqu'une fonction f est dérivable en a :

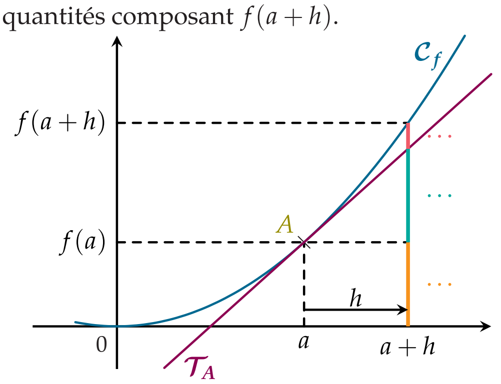
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \underset{h \to 0}{\to} f'(a).$$

On peut également écrire cette définition sous la forme :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\to} 0.$$

1) À partir de cette dernière égalité, écrire $f(a+h)$.

2) Reproduire le graphique suivant et reporter chacune des quantités composant $f(a+h)$.



3) Lorsque h est proche de 0, on peut négliger l'un des termes.

a) On a alors $f(a+h) \approx \ldots$

b) Dans quelle formule du cours retrouve-t-on le membre de droite ? (On pourra poser $x = a + h$.)

Cette écriture correspond à l'approximation affine de f au voisinage de a.

4) Dans chacun des cas suivants :

a) Écrire l'approximation de f au voisinage de a ;

b) En déduire une valeur approchée des nombres demandés et comparer avec leur valeur exacte.

- $f : x \mapsto x^2$, $a = 1$. Calculer $1{,}01^2$ puis $0{,}996^2$.
- $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = 1$. Calculer $\sqrt{1{,}005}$ puis $\sqrt{0{,}999}$.
- $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $a = 2$. Calculer $\dfrac{1}{2{,}002}$ puis $\dfrac{1}{1{,}995}$.

5) En considérant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, démontrer que pour tout réel h proche de 0, $\dfrac{1}{1+h}$ est à peu près égal à $1 - h$.

63 Soit f une fonction dérivable en a. Alors :

$$\frac{f(a-h) - f(a)}{h} \underset{h \to 0}{\to} \ldots$$

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $f(-x) = f(x)$ (on dit que f est paire).

1) Soit $M(a\ ;\ f(a))$ et $N(-a\ ;\ f(-a))$. Quel est le lien géométrique entre M et N ?

2) En utilisant le résultat de la question **1)**, démontrer que pour tout réel a : $f'(-a) = -f'(a)$.

3) Que peut-on alors dire de $f'(0)$?

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $f(-x) = -f(x)$ (on dit que f est impaire).

4) Soit $M(a\ ;\ f(a))$ et $N(-a\ ;\ f(-a))$. Quel est le lien géométrique entre M et N ?

5) Démontrer que pour tout réel a : $f'(-a) = f(a)$.

64 Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur I par $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$. On souhaite déterminer f'.

1) Soit $a \in I$. Expliciter $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(a)$ puis l'exprimer sous la forme d'un produit dont l'un des facteurs est $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}(a)$.

2) Que représente le second facteur ? Justifier l'importance de l'hypothèse « u strictement positive sur I ».

3) En déduire $f'(a)$.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

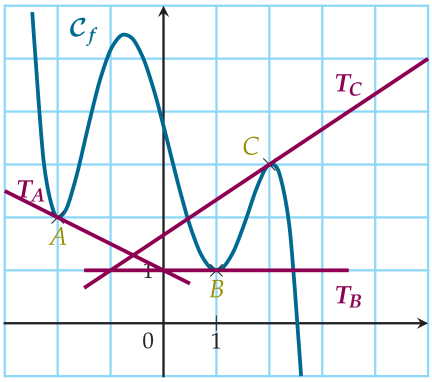
- Déterminer $f'(a)$, nombre dérivé de f en un réel a donné
- Déterminer l'accroissement moyen d'une fonction
- Déterminer la fonction dérivée d'une fonction donnée
- Déterminer l'équation réduite d'une tangente

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les questions 65 à 67, on utilise le graphique ci-contre.



65 Graphiquement, $f'(-2) =$

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ 2 ⓒ $-\frac{1}{2}$ ⓓ -2

66 Graphiquement, $f'(1) =$

ⓐ n'existe pas ⓑ 0 ⓒ 1

67 Graphiquement, $f'(2) =$

ⓐ $\frac{2}{3}$ ⓑ $-\frac{2}{3}$ ⓒ $\frac{3}{2}$ ⓓ $-\frac{3}{2}$

68 Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x$. Alors $\frac{\Delta f}{\Delta x}(2) =$

ⓐ $\frac{(2+h)^2 - 4 + 2h}{h}$ ⓑ $h+2$ ⓒ $\frac{(2+h)^2 - 4 - 2h}{h}$ ⓓ 2

69 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors $\frac{\Delta f}{\Delta x}(3) =$

ⓐ $\frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}$ ⓑ $\frac{\sqrt{h}}{h}$ ⓒ $\frac{1}{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}$ ⓓ $\frac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}}$

70 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors $\frac{\Delta f}{\Delta x}(1) =$

ⓐ $\frac{1}{1+h}$ ⓑ $-\frac{1}{1+h}$ ⓒ $\frac{2}{1+h}$ ⓓ $-\frac{0}{h}$

71 Soit $f : x \mapsto 6x^3$. Alors pour tout réel x, $f'(x) =$

ⓐ $6x^2$ ⓑ $18x^2$ ⓒ $2x^2$ ⓓ $9x^2$

72 Soit $f : x \mapsto 2\sqrt{x}$. Alors pour tout réel x strictement positif, $f'(x) =$

ⓐ $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ⓑ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ⓒ $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

73 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x}$. Alors pour tout réel x non nul, $f'(x) =$

ⓐ $-\dfrac{1}{3x^2}$ ⓑ $\dfrac{3}{x^2}$ ⓒ $-\dfrac{3}{x^2}$ ⓓ $\dfrac{1}{3x^2}$

74 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - x + 7$. Alors pour tout réel x, $f'(x) =$

ⓐ $0x^2 - 0x^2 - 1 = -1$ ⓑ $x^2 - x + 6$ ⓒ $x^2 - x - 1$ ⓓ $0x^2 - 0x^2 + 6 = 6$

75 Soit $f : x \mapsto x^2 - \dfrac{1}{x}$. Alors pour tout réel x non nul, $f'(x) =$

ⓐ $2x - \dfrac{1}{x^2}$ ⓑ $2x + \dfrac{1}{x^2}$ ⓒ $\dfrac{2x^3+1}{x^2}$ ⓓ $\dfrac{2x^3-1}{x^2}$

76 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x} - 3x$. Alors pour tout réel x strictement positif, $f'(x) =$

ⓐ $\dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3$ ⓑ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ⓒ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 3$ ⓓ $\dfrac{1}{2x} - 3$

77 Soit $f : x \mapsto (x^2-1)\sqrt{x}$. Alors pour tout réel x strictement positif, $f'(x) =$

ⓐ $x\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ⓑ $\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$ ⓒ $2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}$

78 Soit $f : x \mapsto \dfrac{3}{2x-1}$. Alors pour tout réel x différent de $\dfrac{1}{2}$, $f'(x) =$

ⓐ $-\dfrac{3}{(2x-1)^2}$ ⓑ $-\dfrac{6}{(2x-1)^2}$ ⓒ $\dfrac{6}{(2x-1)^2}$ ⓓ $\dfrac{3}{(2x-1)^2}$

79 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$. Alors pour tout réel x différent de -1, $f'(x) =$

ⓐ $\dfrac{1}{1} = 1$ ⓑ $\dfrac{2x}{(x+1)^2}$ ⓒ $\dfrac{2}{(x+1)^2}$ ⓓ $-\dfrac{2}{(x+1)^2}$

On note f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Pour $a \in I$, on note $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

80 Soit $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{x}{5}$ et $a = 2$. $\mathcal{T}$ a pour équation :

ⓐ $y = 2x + \dfrac{1}{5}$ ⓑ $y = \dfrac{19}{5}x - \dfrac{16}{5}$ ⓒ $y = \dfrac{21}{5}x - 4$

81 Soit $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$ et $a = -1$. $\mathcal{T}$ a pour équation :

ⓐ $y = 2x + 2$ ⓑ $y = -2$ ⓒ $y = x + 3$

Travaux pratiques

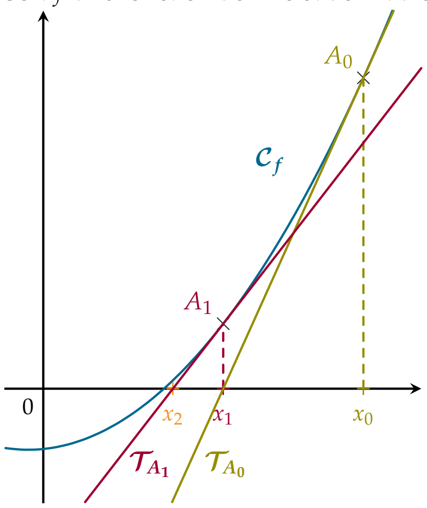
TP 1 Méthode de Newton-Raphson

ALGO INFO

Le but de cette méthode est de trouver des valeurs approchées des solutions d'une équation que l'on ne sait pas résoudre de façon algébrique.

1 Description de l'algorithme

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$.



1) On note x_0 une première valeur approchée de l'équation $f(x) = 0$.

2) D'après l'exercice 62 p. 75, pour h proche de 0 :
$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0).$$
En posant $x = x_0 + h$, on obtient :
$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

3) La solution de l'équation $f(x) = 0$ dans le voisinage de x_0 a donc pour valeur approchée la solution de l'équation :
$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0.$$

4) On note x_1 la solution de cette équation, nouvelle valeur approchée de l'équation $f(x) = 0$ et on recommence à l'étape **2.**

2 Mise en place de l'algorithme

1) D'après la description de l'algorithme, exprimer x_1 en fonction de f, f' et x_0.

2) On considère l'algorithme suivant qui permet de calculer et afficher les dix premières valeurs : $x_1, \ldots, x_{10}$.
Le compléter puis le tester dans un logiciel adapté.

```
Liste des variables utilisées
   x : nombre
   f,f' : fonction
Entrées
   Demander x
   Demander f,f'
Traitement
   Pour i variant de 1 à ... faire
      Donner à x la valeur de ...
Affichage
      Afficher x
   Fin Pour
Fin de l'algorithme
```

3) On propose maintenant de s'arrêter lorsque la valeur approchée est « suffisamment précise ». Adapter l'algorithme pour chacune des précisions suivantes :

a) $|f(x)| < 10^{-3}$;

b) $|f(x)| < 10^{p}$, p quelconque ;

c) La différence entre deux valeurs consécutives de la variable x est inférieure à 10^{-3} ;

d) La différence entre deux valeurs consécutives de la variable x est inférieure à 10^{p}, p quelconque.

3 Application

Pour chacune des fonctions suivantes :

1) la représenter graphiquement ;

2) déterminer graphiquement une première valeur approchée des solutions de $f(x) = 0$;

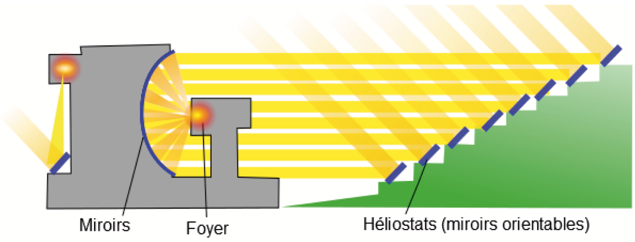
3) appliquer l'algorithme à l'aide d'un logiciel adapté.

- $f : x \mapsto x^2 - 2$
- $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 4x + 1$
- $f : x \mapsto x^5 - 3x - 2$

TP 2 Construction d'une courbe par ses tangentes

INFO

On souhaite trouver la meilleure courbe possible pour un four solaire dont le principe est le suivant : on suppose que les rayons du soleil arrivent en ligne droite sur des miroirs qui réfléchissent alors ces rayons et les concentrent en un point focal.



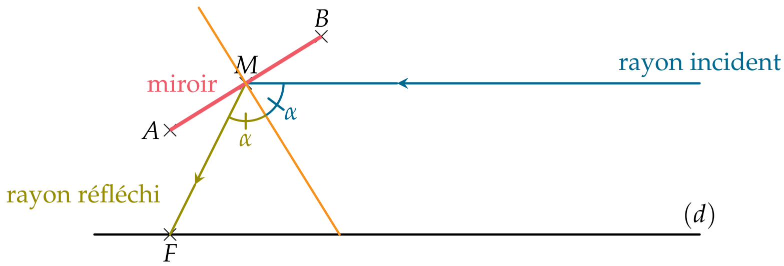
Source : commons.wikimedia.org/wiki/

1 Analyse de la situation

Soit F le point focal et (d) la droite passant par F symbolisant la direction dans laquelle arrivent les rayons. $\overset{\frown}{AB}$ est un morceau de la courbe réfléchissant un rayon arrivant au point M.

On sait qu'au voisinage d'un point, la courbe peut être confondue avec sa tangente. On supposera donc qu'au voisinage de M, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est assimilable à un segment de droite $[AB]$.

Selon le principe de la loi de la réflexion, les rayons incidents et réfléchis forment avec la normale au point d'incidence le même angle, noté α.



Travaux pratiques

2 Construction de la courbe

1) Pourquoi peut-on assimiler tous les rayons incidents provenant du soleil à des (demi-)droites parallèles entre elles, et donc à une même droite (d).

2) On suppose que l'on connaît uniquement le point focal F, la direction (d) de provenance des rayons et un point d'incidence M.

a) Dans un logiciel de géométrie, proposer puis réaliser une construction géométrique de la droite servant de support au segment $[AB]$.

b) Comme la confusion entre $\overset{\frown}{AB}$ et $[AB]$ est locale, on tracera un cercle de centre M et de rayon assez petit ($0,5$ est un bon compromis pour commencer) et l'on placera les points A et B à l'intersection de ce cercle avec la droite support.

c) Créer alors une macro-construction ayant pour objets initiaux F, (d) et M et pour objet final le segment $[AB]$.

d) Appliquer alors cette macro-construction à un premier point M (quelconque) afin d'obtenir un premier segment.
Recommencer avec un autre point M de telle sorte que le deuxième segment soit dans la continuité du premier. (Si besoin, on pourra d'abord créer ce deuxième point n'importe où puis « l'amener au bon endroit ».)

3) Quelle est la forme de la courbe ainsi obtenue ?

Récréation, énigmes

Plusieurs mathématiciens sont à l'origine du calcul infinitésimal. Deux d'entre eux se sont particulièrement disputé la parternité de cette théorie, éclipsant au passage leurs confrères.
Les mathématiciens français Pierre de Fermat et japonais Kowa Seki sont d'autres contributeurs contemporains.

1) Qui sont les deux protagonistes à l'origine de la controverse ?

2) Quelle autre controverse a opposé ces deux personnages ?

3) De qui est héritée la notation « classique » $f'(a)$?

4) De qui est héritée la notation $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ évoquée dans le cours ?

5) Quelles autres notations existent et dans quels cas sont-elles utilisées ?

ANALYSE

4

Applications de la dérivation

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Étudier le signe d'un produit, d'un quotient
- Étudier le signe d'un polynôme du 2d degré
- Déterminer la fonction dérivée d'une fonction donnée
- Établir les tableaux de signes ou de variations d'une fonction à partir d'une représentation graphique
- Interpréter un tableau de variations et un tableau de signes

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Établir le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto (-x+3)(2x+5)$

2) $g : x \mapsto -2x^3 + 3x^2 + 5x$

3) $h : x \mapsto \dfrac{-x+3}{2x+5}$

4) $i : x \mapsto \dfrac{x+2}{-2x^2+3x+5}$

2 Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions données ci-dessous.

1) $f : x \mapsto x^4 - 6x^3 + 2$

2) $g : x \mapsto x\sqrt{x}$

3) $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+5}$

4) $i : x \mapsto \dfrac{-x+3}{2x+5}$

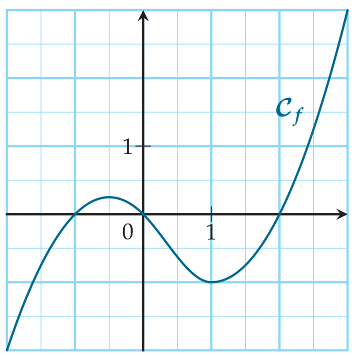
3 On considère une fonction f définie sur $[-3\,;\,10]$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	-3		-1		4		10
f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Pour chacun des intervalles suivants, donner, si possible, le maximum et le minimum de f ainsi que les valeurs de x pour lesquels ils sont atteints :

1) $[-3\,;\,-1]$ **2)** $]-3\,;\,4[$

4 On considère une fonction f dont on donne la représentation graphique ci-dessous.



1) Établir le tableau de signes de $f(x)$.

2) Établir le tableau de variations de f.

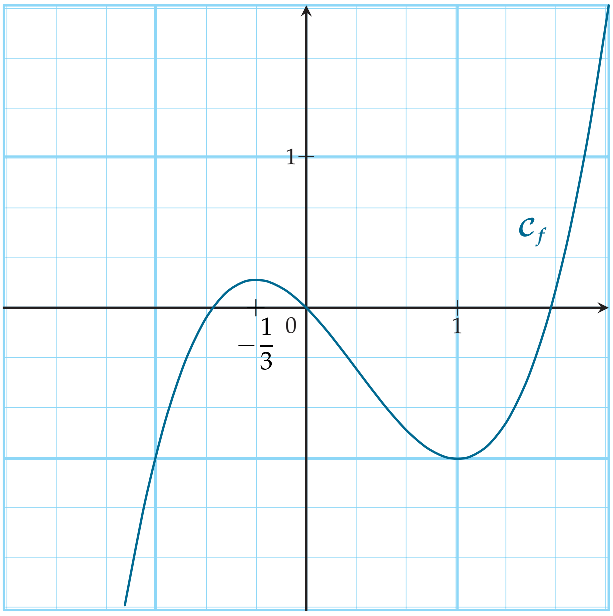
Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 D'une fonction... à une autre

INFO

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x$ dont on donne la réprésentation graphique ci-dessous.



1) Établir le tableau de variations de f.

x	$-\infty$	$\cdots$	$\cdots$	$+\infty$
f				

2) **a)** Reproduire cette courbe.

b) Placer le point de coordonnées $(-1\,;\,-1)$ et tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par ce point. Graphiquement, que peut-on dire de $f'(-1)$?

c) Même consigne avec les points $(0\,;\,0)$, $(1\,;\,-1)$, $\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{5}{27}\right)$...

d) En déduire le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
$f'(x)$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	

3) En déduire le lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée.

4) Visualisation graphique

a) Dans un logiciel de géométrie, représenter f.

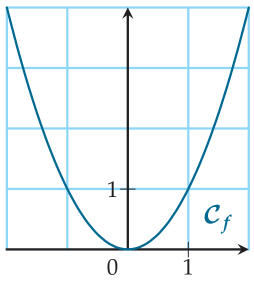
b) Soit $M \in \mathcal{C}_f$. Créer l'expression $t = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}(x_M)$.

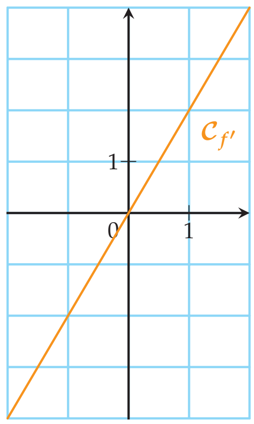
c) Soit P le point de coordonnées $(x_M\,;\,t)$ dont on activera la trace.

d) Déplacer M sur $\mathcal{C}_f$ et observer le lieu de P.
Que représente-t-il ?

ACTIVITÉ 2 Étudier une fonction ou sa dérivée ?

Soit f la fonction carrée, c'est-à-dire $f : x \mapsto x^2$. Sa fonction dérivée est donc $f' : x \mapsto 2x$. Ci-dessous, on donne leur représentation graphique sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$.





1) a) Sur quel intervalle la dérivée est-elle négative ?

b) Sur cet intervalle, quel est le sens de variation de f ?

2) Mêmes questions mais en considérant l'intervalle sur lequel la dérivée est positive.

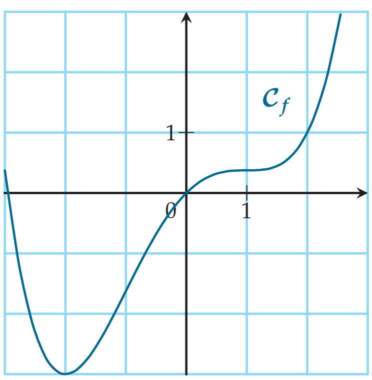
3) a) Démontrer que si $x \in [-2\,;\,0]$, alors $f'(x) \leq 0$.

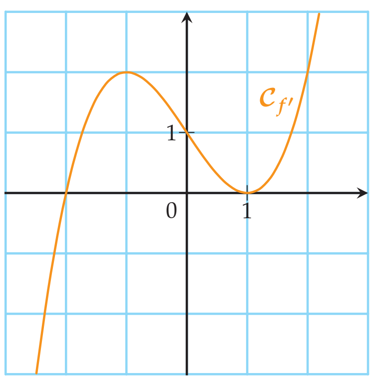
b) Démontrer, en utilisant la définition d'une fonction décroissante, que f l'est sur l'intervalle $[-2\,;\,0]$.

c) En comparant les vitesses de démonstration des questions **3)a)** et **3)b)**, justifier l'utilisation de la dérivée pour déterminer le sens de variation d'une fonction.

ACTIVITÉ 3 Lorsque la dérivée s'annule

Ci-dessous, la représentation graphique d'une fonction f ainsi que celle de sa dérivée f'.





1) Que se passe-t-il pour f lorsque $f'(x)$ s'annule ?

2) Que se passe-t-il pour f lorsque $f'(x)$ s'annule en changeant de signe ?

Cours - Méthodes

Dans tout le chapitre, on notera f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

1. Signe de la dérivée et variations

PROPRIÉTÉ : Du sens de variation de f au signe de $f'(x)$

1) Si f est constante sur I, alors $f'(x) = 0$ pour tout réel x de I.
2) Si f est strictement croissante sur I, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de I.
3) Si f est strictement décroissante sur I, alors $f'(x) \leq 0$ pour tout réel x de I.

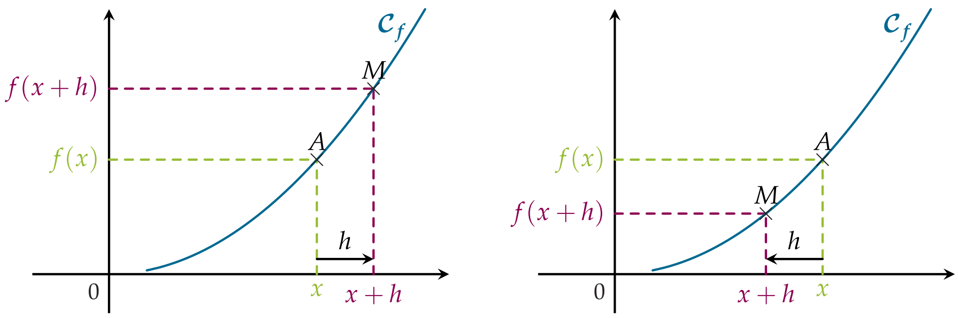
PREUVE Soit $x \in I$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$.

1) f est constante sur I donc par définition : pour tous u et v de I, on a $f(u) = f(v)$.
En particulier, en posant $u = x + h$ et $v = x$, on obtient :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Le membre de gauche de cette égalité tendant vers $f'(x)$ lorsque $h \to 0$, on en déduit que $f'(x) = 0$.

2) f est strictement croissante sur I donc par définition : pour tous u et v de I tels que $u < v$, on a $f(u) < f(v)$. En particulier :
- Si $h > 0$, alors $x < x + h$ et donc $f(x) < f(x+h)$, c'est-à-dire $f(x+h) - f(x) > 0$.
- Si $h < 0$, alors $x > x + h$ et donc $f(x) > f(x+h)$, c'est-à-dire $f(x+h) - f(x) < 0$.



$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x)$ (coefficient directeur de (AM)) est donc le quotient de deux quantités de même signe, donc toujours strictement positif. Lorsque $h \to 0$, on obtient intuitivement que $f'(x) \geq 0$.

3) Même principe de démonstration que pour le 2$^{\text{e}}$ point.

REMARQUE : La limite d'une quantité strictement positive peut être égale à 0. Par exemple, admettons que l'on ait, pour tout $h > 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = h$. Lorsque h tend vers 0, ce taux d'accroissement tend donc vers 0 et on obtient $f'(x) = 0$.

Exemple

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On a donc $f'(x) = 2x$.
f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et on a bien $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;\,0]$.
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a donc $f'(x) = 3x^2$.
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a bien $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

REMARQUE : En pratique, on utilisera plutôt la propriété suivante (qui est presque réciproque de la précédente) car il est plus facile d'obtenir le signe d'une expression que le sens de variation d'une fonction.

PROPRIÉTÉ : Du signe de $f'(x)$ au sens de variation de f

1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
3) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

PREUVE Voir exercice 66 p. 98 ainsi que l'exercice 28 p. 91 qui montre que les deux premiers points de la propriété restent valables si $f'(x) = 0$ en un nombre fini de points.

MÉTHODE 1 Déterminer les variations d'une fonction

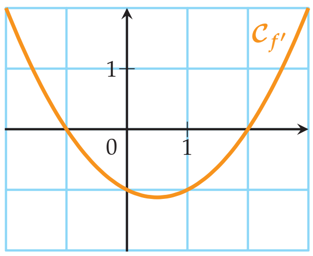
► Ex. 20 p. 90

1) On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis on calcule $f'(x)$.
2) On étudie le signe de $f'(x)$.
3) On en déduit les variations de f et on résume le tout dans un tableau.

Exercice d'application Déterminer les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - x.$$

Correction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 1$. f' est une fonction polynôme du second degré et ses racines sont -1 et 2. Comme $a > 0$, on a alors :



D'où le signe de $f'(x)$ et les variations de f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{7}{12}$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	

Pour compléter le tableau, on calcule :

- $f(-1) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{-2-3+12}{12} = \frac{7}{12}$
- $f(2) = \frac{8}{6} - 1 - 2 = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$

Cours - Méthodes

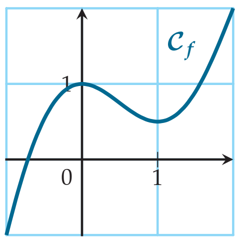
2. Extrema d'une fonction

DÉFINITION : Extremum

1) On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant a tel que, pour tout $x \in J$: $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).
2) Dire qu'une fonction admet un **extremum local** signifie que f admet un maximum local ou un minimum local.

REMARQUE : Un intervalle ouvert est un intervalle de la forme $]\alpha\,;\,\beta[$ où α et β sont deux réels tels que $\alpha < \beta$.

Exemple La fonction f représentée ci-dessous est définie sur $I = [-1\,;\,2]$.



1) f admet un maximum local en $a = 0$.
En effet, prenons $J =]-0,5\,;\,0,5[$ pour lequel on a bien $0 \in J \subset I$ et pour tout $x \in J$, $f(x) \leq 1$.
2) f admet un minimum local en $a = 1$.
En effet, prenons $J =]0,5\,;\,1,5[$ pour lequel on a bien $1 \in J \subset I$ et pour tout $x \in J$, $f(x) \geq \frac{1}{2}$.
3) On ne peut pas dire que f admet un maximum local en $a = 2$ car on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert contenant a et contenu dans I.

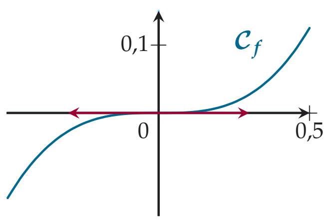
PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

PREUVE Voir exercice 64 p. 98.

REMARQUE :

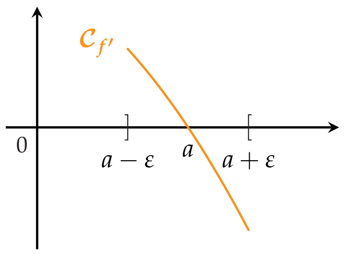
La réciproque de cette propriété est fausse. Prenons par exemple la fonction cube, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Sa fonction dérivée, $f' : x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0 mais pourtant f n'admet pas d'extremum en 0 puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

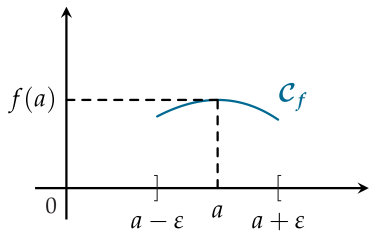


PROPRIÉTÉ : Caractérisation d'un extremum

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

PREUVE Traitons le cas où $f'(x)$ est strictement positive « avant a », nulle en a et strictement négative « après a ». Mathématiquement, cela se traduit par l'existence d'un intervalle ouvert $J =]a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon[$ tel que $f'(x) > 0$ sur $J_1 =]a-\varepsilon\,;\,a[$ et $f'(x) < 0$ sur $J_2 =]a\,;\,a+\varepsilon[$. Ainsi, f est strictement croissante sur J_1 et strictement décroissante sur J_2. Cela signifie que pour tout $x \in J_1$, $f(x) > f(a)$ et pour tout $x \in J_2$, $f(x) < f(a)$ et donc, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(a)$.





Le cas d'un minimum se traite de la même manière.

MÉTHODE 2 Faire le lien entre extrema et dérivée

► Ex. 40 p. 92

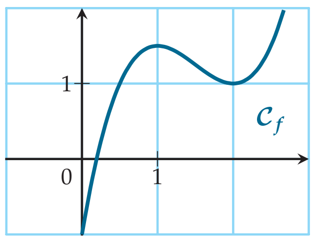
1) On repère les extrema locaux de f en lesquels f' doit s'annuler en changeant de signe.

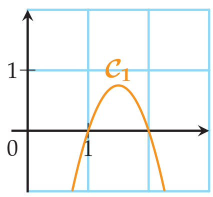
2) On repère la nature de chaque extremum :

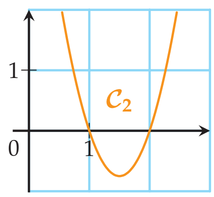
- **a)** si c'est un maximum, la dérivée doit être positive « avant » et négative « après » ;
- **b)** si c'est un minimum, la dérivée doit être négative « avant » et positive « après ».

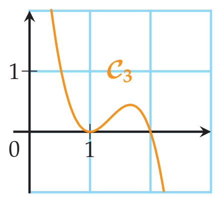
Exercice d'application

On considère une fonction f dont on donne la représentation graphique ci-contre.
Parmi les courbes ci-dessous, laquelle est susceptible de représenter f' ?









Correction f possède deux extrema locaux en $x = 1$ et $x = 2$. La dérivée doit donc s'annuler en changeant de signe en $x = 1$ et $x = 2$: on peut donc éliminer $\mathcal{C}_3$ car la fonction associée à cette courbe ne change pas de signe en $x = 1$.
En $x = 1$, l'extremum est un maximum donc $f'(x)$ doit être positive « avant 1 » , s'annuler en 1 puis être négative « après 1 » : seule la courbe $\mathcal{C}_2$ convient.
On peut vérifier avec l'autre extremum : en $x = 2$ on a un minimum et la fonction associée à la courbe $\mathcal{C}_2$ est bien négative « avant 2 » et positive « après 2 ».

S'entraîner

Activités mentales

1 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1) Donner le sens de variation de f.

2) En quelle valeur(s) f admet-elle un maximum ou un minimum local ?

2 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est $f'(x) = (x-1)(x-2)$.
Donner le sens de variation de f.

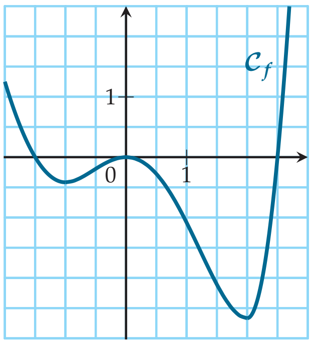
3 Donner le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$.

4 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
f		$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donner le signe de $f'(x)$.

5 Soit f une fonction dérivable sur $[-2\ ;\ 3]$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous.



1) Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $f(x) > 0$ **c)** $f'(x) > 0$

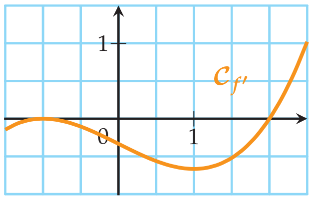
b) $f(x) < 0$ **d)** $f'(x) < 0$

2) Existe-t-il un lien entre le signe de $f(x)$ et celui de $f'(x)$?

3) Résoudre graphiquement les équations :

a) $f(x) = 0$ **b)** $f'(x) = 0$

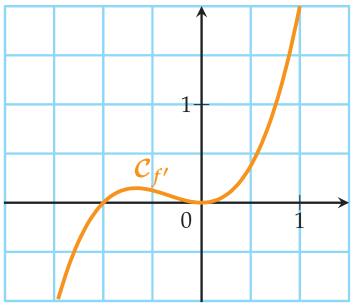
6 Soit f une fonction dérivable sur $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{5}{2}\right]$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_{f'}$ de la dérivée.



1) Déterminer les valeurs de x en lesquelles f admet des extrema locaux.

2) Préciser la nature de ces extrema.

7 Soit f une fonction dérivable sur $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ 1\right]$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_{f'}$ de la dérivée.



1) Sur quels intervalles :

a) f est-elle strictement croissante ?

b) f est-elle strictement décroissante ?

2) Répondre par vrai ou faux, en justifiant :

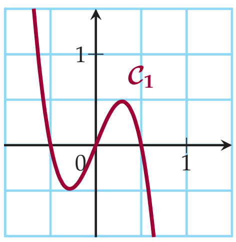
a) f admet un minimum en -1 ;

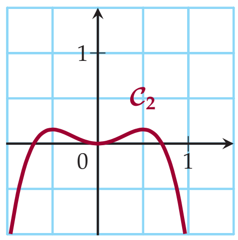
b) f admet un maximum en -1 ;

c) f admet un minimum en 0 ;

d) f admet un maximum en 0.

8 Voici deux courbes dont l'une représente une fonction f et l'autre sa dérivée f'.





Quelle est la courbe représentant f et quelle est celle représentant f' ?

Variations de fonctions

9 On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

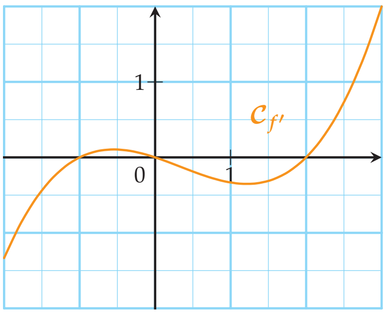
x	$-\infty$		-1		0		$\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On donne $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = 0$ et $f(4) = 1$.
Établir le tableau de variations de f.

10 Même consigne qu'à l'exercice **9** avec f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $f(0) = 1$ et $f(3) = 2$.

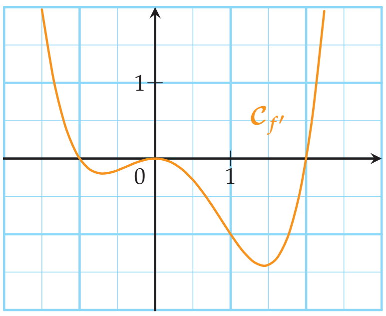
x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	Z	$+$	‖	$-$	0	$+$	

11 On donne ci-dessous la courbe de la fonction dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $[-2\,;\,3]$.



On donne $f(-1) = \frac{3}{8}$, $f(0) = \frac{4}{9}$, $f(2) = 0$.
Établir le tableau de variations de f.

12 Même consigne qu'à l'exercice **11**.



On donne $f(-1) = 1{,}575$, $f(0) = \frac{22}{15}$ et $f(2) = 0$.

Pour chacun des exercices de **13** à **17** :
1) Établir le tableau de variations de f.
2) Esquisser une courbe possible représentant f.

13 On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, $f(3) = 2$.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

14 On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f(-1) = -2$ et $f(1) = 2$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

15 On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ et $f(4) = 3$.

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

16 On donne ci-dessous le tableau de variations de la dérivée d'une fonction f définie sur $[-2\,;\,6]$ et $f(-2) = -1$, $f(-1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(4) = 1$ et $f(6) = 0$.

x	-2		-1		2		4		6
f'	1	↗	2	↘	0	↘	-1	↗	0

17 On donne ci-dessous le tableau de variations de la dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et $f(0) = 2$, $f(2) = 1{,}5$, $f(3) = 0$ et $f(4) = -1$.

x	0		2		3		4		$+\infty$
f'	0	↘	-1	↘	-2	↗	0	↘	1

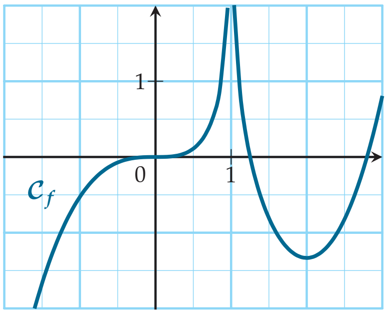
S'entraîner

18 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		4		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Établir le tableau de signes de $f'(x)$.

19 On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Établir le tableau de signes de $f'(x)$.

20 ► MÉTHODE 1 p. 85

Soit f définie par $f(x) = x^3 + x^2 - x$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer $f'(x)$.
3) Étudier le signe de $f'(x)$.
4) En déduire les variations de f.

21 Déterminer les variations des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

1) $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 5$
2) $g : x \mapsto -x^3 + 2x - 3$
3) $u : x \mapsto x^4 - x^2 + 2$
4) $v : x \mapsto x^5 - x^3$

22 Dans chaque cas, déterminer les variations de la fonction f définie par :

1) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$.
2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,1\}$

23 Dans chaque cas suivant, déterminer l'ensemble de définition puis les variations de la fonction f définie par :

1) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^3}$
2) $f(x) = \dfrac{10\sqrt{x}}{x+1}$
3) f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{2x^2}$.
   Indication :

```
(%i1) x^3-1, factor;
(%o1) (x-1)(x^2+x+1)
```

24 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par :

$$f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x}.$$

1) Déterminer $f'(x)$.
2) Étudier le signe de $f'(x)$.
   On pourra utiliser la factorisation suivante :

```
(%i1) factor(2*x^3+x^2+1);
(%o1) (x+1)(2 x^2-x+1)
```

3) En déduire les variations de f.
4) On se propose de retrouver manuellement le résultat admis à la question 2).
   a) Démontrer que -1 est racine évidente de :
   $$x \mapsto 2x^3 + x^2 + 1.$$
   b) On a donc $2x^3 + x^2 + 1 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$, où a, b et c sont trois réels.
   Déterminer a, b et c.

25 **Avec une fonction auxiliaire**

1) Soit g la fonction définie sur $]-4\,;\,+\infty[$ par :
   $$g(x) = x^3 + 6x^2 + 1.$$
   a) Déterminer les variations de g sur son ensemble de définition.
   b) En déduire le signe de $g(x)$.
2) Soit f la fonction définie sur $]-4\,;\,+\infty[$ par :
   $$f(x) = \frac{x^3-2}{x+4}.$$
   a) Déterminer $f'(x)$.
   b) À l'aide de la question 1), en déduire les variations de f.

26 **Fonctions associées**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 2.$$

1) Déterminer les variations de f.

2) **a)** Vérifier que -2 est une racine de f.

b) On a donc $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont trois réels.
Déterminer a, b et c.

c) En déduire le tableau de signes de $f(x)$.

3) Déduire des questions précédentes les ensembles de définition et les variations des fonctions suivantes :

a) $g : x \mapsto -2f(x)$ **c)** $j : x \mapsto \sqrt{f(x)}$

b) $i : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$

27 En s'inspirant de l'exercice **26**, déterminer les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ sans utiliser aucun résultat de dérivation.

28 **Une petite démonstration**

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I =]\alpha\,;\,\beta[$ telle que $f'(x) > 0$ sur I sauf en un réel $c \in I$ où $f'(c) = 0$.

1) D'après les résultats du cours, sur quel(s) intervalle(s) f est-elle strictement croissante ?

2) Démontrer que l'on peut en déduire que f est strictement croissante sur I.

3) Compléter alors la phrase suivante :
« Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ sauf éventuellement ...., alors f est strictement croissante sur I ».

4) Donner un exemple de fonction, déjà vue en cours, pour laquelle cette propriété s'applique.

29 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple et lorsqu'elles sont vraies, reformuler en utilisant le mot « suffisant ».

1) « $f'(a) = 0$ » est une condition nécessaire à « f admet un extremum local en a » ;

2) « f admet un extremum local en a » est une condition nécessaire à « $f'(a) = 0$ » ;

3) « $f'(x) > 0$ » est une condition nécessaire à « f strictement croissante sur I » ;

4) « f est strictement croissante sur I » est une condition nécessaire à « $f'(x) > 0$ sur I ».

Positions relatives

30 Soit $f : x \mapsto x^3 + x^2 - x$.

1) Déterminer les variations de f.

2) Déterminer l'équation de $\mathcal{T}$, tangente à $\mathcal{C}_f$ en $a = 0$.

3) On souhaite étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$.

a) Calculer $d(x) = f(x) - (mx + p)$, où $y = mx + p$ est l'équation de $\mathcal{T}$.

b) Déterminer le signe de $d(x)$.

c) Compléter :
« Si $d(x) > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est .... de $\mathcal{T}$ ».
« Si $d(x) < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est .... de $\mathcal{T}$ ».
« Si $d(x) = 0$, alors ...... ».

d) Dans un repère orthonormé, tracer $\mathcal{T}$ puis, à l'aide du tableau de variations de f, donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

31 Même consigne qu'à l'exercice **30** avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad a = 0.$$

32 Même consigne qu'à l'exercice **30** avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x \quad \text{et} \quad a = 0.$$

33 Même consigne qu'à l'exercice **30** avec la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} \quad \text{et} \quad a = 1.$$

Pour l'étude de la position relative, on pourra utiliser la factorisation suivante :

```
(%i1) 1/(1+x^3)-(-3/4*x+5/4), factor;
```

$$\text{(\%o1)} \quad \frac{(x-1)^2(3x^2+x-1)}{4(x+1)(x^2-x+1)}$$

34 Même consigne qu'à l'exercice **30** avec la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad a = \frac{9}{4}.$$

Pour l'étude de la position relative, on pourra utiliser la factorisation suivante :

```
(%i1) 4*X^3-27*X+27, factor;
```

$$\text{(\%o1)} \quad (X+3)(2X-3)^2$$

S'entraîner

Extrema et dérivée

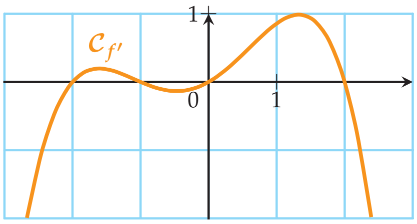
35 Voici la tableau de signes de la fonction dérivée d'une fonction f.
Sans établir le tableau de variations de f, dire en quelle(s) valeur(s) f admet-elle un (des) extremum (extrema) local (locaux) ? Préciser leur nature.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

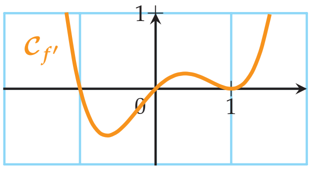
36 Même consigne qu'à l'exercice **35**.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

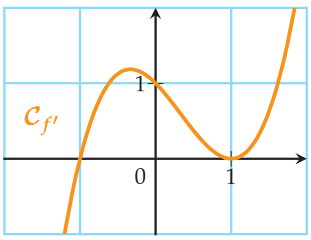
37 Même consigne qu'à l'exercice **35** mais en considérant la courbe représentative de la dérivée d'une fonction f.



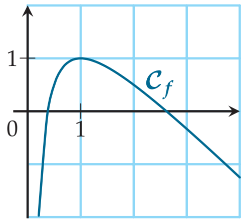
38 Même consigne qu'à l'exercice **35** mais en considérant la courbe représentative de la dérivée d'une fonction f.



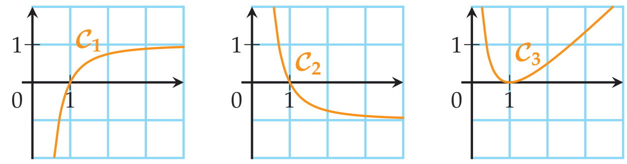
39 Même consigne qu'à l'exercice **35** mais en considérant la courbe représentative de la dérivée d'une fonction f.



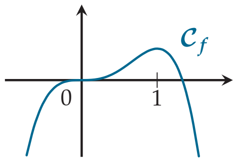
40 ► MÉTHODE 2 p. 87
On considère une fonction f dont on donne la représentation graphique ci-dessous.

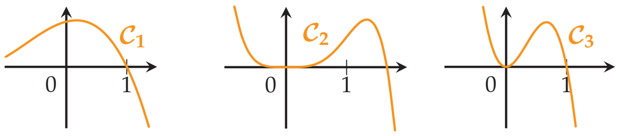


Parmi les trois courbes suivantes, laquelle est susceptible de représenter f' ?

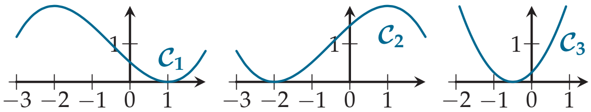


41 Même consigne qu'à l'exercice **40**.

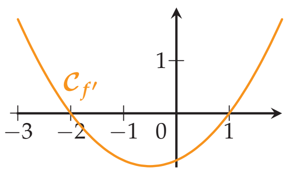




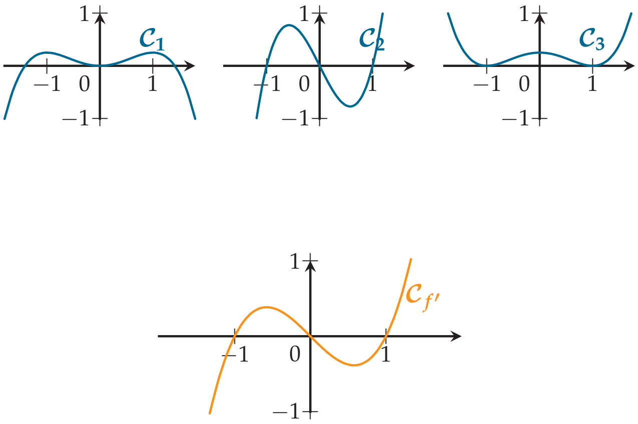
42 On donne ci-dessous les représentations de trois fonctions f_1, f_2 et f_3.



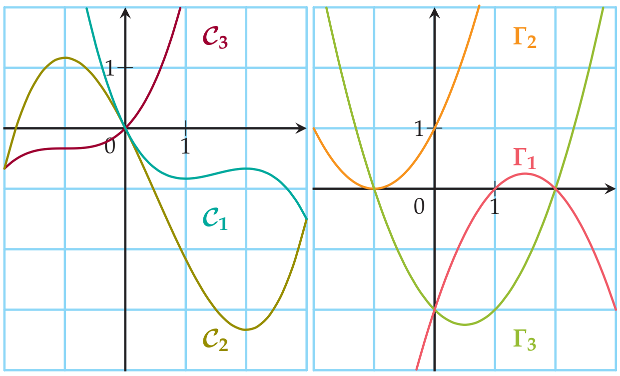
Parmi ces trois fonctions, laquelle est susceptible d'avoir pour dérivée la fonction représentée ci-dessous ?



43 Même consigne qu'à l'exercice **42**.

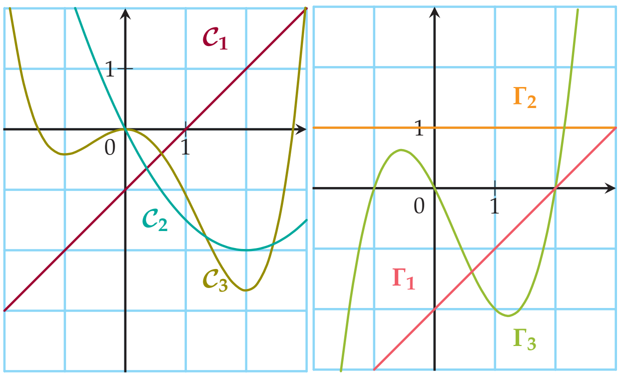


44 On donne ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentant trois fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, ainsi que Γ_1, Γ_2 et Γ_3 représentant leur dérivée.



Associer, en justifiant, les courbes par binôme.

45 Même consigne qu'à l'exercice **44**.



Problèmes d'optimisation

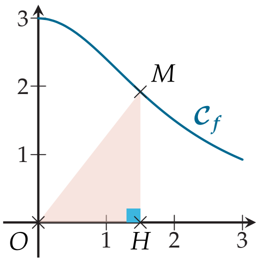
Tous les problèmes suivants peuvent se traiter uniquement de façon algébrique mais il est vivement conseillé, pour ceux marqués du logo **INFO**, d'expérimenter avec un logiciel de géométrie dynamique avant de se plonger dans le cadre théorique.
Pour cela, on pourra adopter la démarche décrite dans les TP p. 103.

46 **INFO**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{12}{x^2+4}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit $M \in \mathcal{C}_f$ et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.



Le but de l'exercice est de déterminer l'aire maximale de OHM, ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire maximale.

1) Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel de géométrie.

2) Algébriquement, on choisit x_M comme variable et on pose $x = x_M$.

a) Déterminer une expression de la fonction :

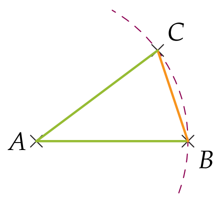
$$\mathcal{A} : x \mapsto \mathcal{A}_{OHM}.$$

b) Déterminer les variations de cette fonction sur son ensemble de définition, que l'on précisera.

c) Répondre au problème posé.

47 **INFO**

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 1$.



Le but de l'exercice est de déterminer l'aire maximale de ABC ainsi que la longueur BC rendant cette aire maximale.

1) Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel de géométrie.
Pour plus de simplicité, on pourra prendre $A(0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0)$ et C sur le cercle de centre A et de rayon 1.

2) On choisit BC comme variable et on pose $x = BC$.

a) À quel intervalle appartient x ?

b) Démontrer que la fonction $\mathcal{A} : x \mapsto \mathcal{A}_{ABC}$ a pour expression :

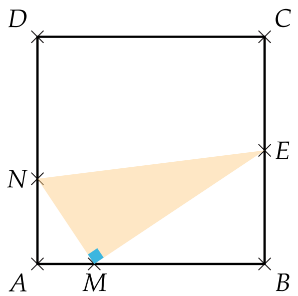
$$\mathcal{A}(x) = \frac{\sqrt{-x^4+4x^2}}{4}.$$

c) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier :
$x \mapsto -x^4 + 4x^2$.

d) Déterminer les variations de cette fonction sur son ensemble de définition et répondre au problème posé. Quelle est alors la nature de ABC ?

3) Point de vue géométrique
On note H le pied de la hauteur issue de C. Exprimer $\mathcal{A}_{ABC}$ en fonction de CH et retrouver le résultat précédent.

48 INFO



On considère un carré $ABCD$ de côté 4. Soient E le milieu de $[BC]$, M un point mobile sur le segment $[AB]$ et N le point de $[AD]$ tel que MNE soit rectangle en M.
Le but de l'exercice est de déterminer l'aire maximale de MNE ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire maximale.

1) Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel de géométrie.

2) a) Démontrer que $\widehat{AMN} = \widehat{MEB}$.

b) En utilisant la trigonométrie, en déduire que :

$$MN = \frac{AM \times EM}{2}.$$

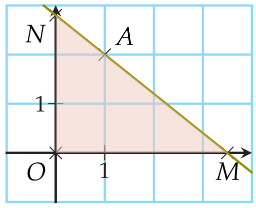
c) En posant $x = AM$, en déduire qu'une expression de $\mathcal{A} : x \mapsto \mathcal{A}_{MNE}$ est $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^3}{4} - 2x^2 + 5x$

d) Étudier cette fonction sur son ensemble de définition, que l'on précisera.

e) Répondre au problème posé.

49 INFO

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le point $A(a\,;\,b)$ où $a > 0$ et $b > 0$ et un point M sur l'axe des abscisses tel que $x_M > a$. La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en un point N. Le but de l'exercice est de déterminer l'aire minimale de OMN ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.



1) Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel de géométrie.

2) Dans cette question, on étudie le cas $A(1\,;\,2)$.

a) On pose $x = x_M$. Démontrer qu'une expression de la fonction $\mathcal{A} : x \mapsto \mathcal{A}_{OMN}$ est :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

b) Déterminer les variations de $\mathcal{A}$ sur son ensemble de définition.

c) Répondre au problème posé.

d) Lorsque l'aire est minimale, que peut-on dire des points A, M et N ?

3) Étudier le cas général, avec $A(a\,;\,b)$.

50 INFO

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit $M \in \mathcal{C}_f$ et $A(0\,;\,3)$.
Le but de l'exercice est de déterminer la longueur minimale de $[AM]$ ainsi que la ou les positions du point M rendant cette longueur minimale.

1) a) Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel.

b) On note M_0 le point réalisant la distance AM minimale. Que peut-on dire de $\mathcal{T}_{M_0}$, tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_0, et de (AM_0) ?

2) Résolution algébrique. On pose $x = x_M$.

a) Pourquoi suffit-il de déterminer les variations de $x \mapsto AM^2$?

b) Résoudre le problème. On pourra, à un moment de la résolution, utiliser la factorisation suivante :

```
(%i1) 2*X^3+X-3, factor;
(%o1) (X-1)(2 X^2+2 X+3)
```

51 On étudie dans cet exercice le problème suivant : « Pour un rectangle d'aire x fixée, quelles sont les valeurs y possibles de son périmètre ? ».
On note l et L les dimensions du rectangle.

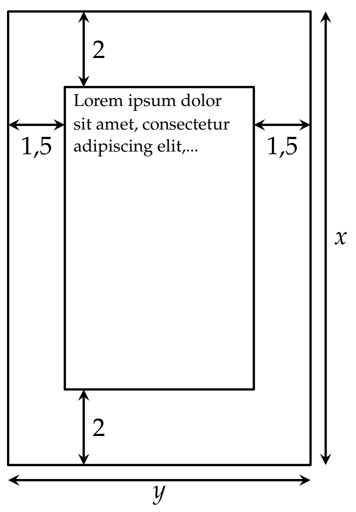
1) Étude d'un cas particulier : $x = 36$.
  a) Exprimer y en fonction de l.
  b) Déterminer les variations de $y : l \mapsto y(l)$.
  c) Répondre au problème posé.

2) Étudier le cas général.

52 Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes :

- sur chaque page, le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm² ;
- les marges gauche et droite doivent mesurer 1,5 cm alors que les marges haut et bas doivent mesurer 2 cm.

Le but de l'exercice est de déterminer quelles doivent être les dimensions de la page pour que la consommation de papier soit minimale.



On note x et y les dimensions de la page et $\mathcal{S}(x) = xy$ la surface de la page.

1) À l'aide des données de l'énoncé, démontrer que :

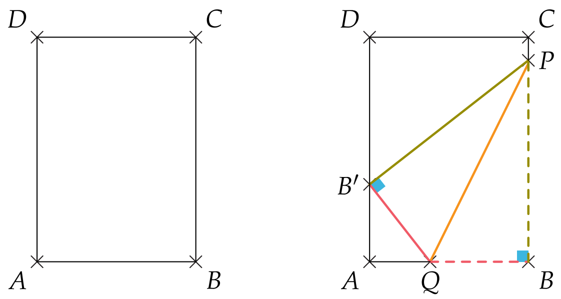
$$y = \frac{288 + 3x}{x - 4}.$$

2) En déduire une expression de $\mathcal{S}(x)$ uniquement en fonction de x puis étudier $\mathcal{S}$ sur son ensemble de définition, que l'on précisera.

3) Répondre au problème posé.

53 INFO

On dispose d'une feuille de papier A4 de format $21 \times 29{,}7$. On plie cette feuille de façon à amener le point B en B', sur le segment $[AD]$. On note $[PQ]$ le segment de pliage.
Le but de l'exercice est de déterminer la longueur minimale du pliage ainsi que la ou les positions du point B' rendant cette longueur minimale.



1) Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel de géométrie. Pour la construction de la figure, on prendra le point Q mobile sur le segment $[AB]$.

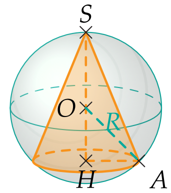
2) On choisit BQ comme variable et on pose $BQ = x$.
  a) À quel intervalle appartient x ?
  b) Déterminer la longueur AB' en fonction de x.
  c) Exprimer l'aire de $BAB'P$ de deux façons différentes. (Sous la forme d'un trapèze puis sous la forme de trois triangles rectangles.)
  d) En déduire que :

$$BP = x\sqrt{\frac{21}{2x - 21}}.$$

  e) En déduire que $PQ^2 = \dfrac{2x^3}{2x - 21}$.

3) Étudier la fonction $x \mapsto PQ^2$ sur son ensemble de définition puis répondre au problème posé.

54 **Un cône dans une sphère**



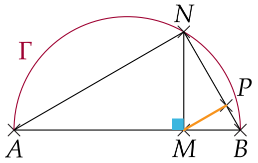
On considère une sphère de centre O et rayon R et dans cette sphère, un cône comme indiqué dans la figure ci-contre.
Quel est le volume maximal du cône ?
Indication : dans cet exercice, on peut choisir comme variable d'étude soit $r = HA$, soit $x = HO$. Essayer les deux approches.

Approfondir

Problèmes d'optimisation

55 INFO

Soient A et B deux points tels que $AB = 1$, Γ le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et M un point mobile sur $[AB]$. La perpendiculaire à (AB) passant par M coupe Γ en N. P est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle MNB.
Le but de l'exercice est de déterminer la longueur maximale de $[MP]$ ainsi que la ou les positions du point M rendant cette longueur maximale.

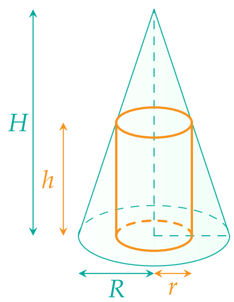


1) Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel de géométrie.

2) Résoudre le problème algébriquement.
Indication : on pourra commencer par démontrer que $AN = \sqrt{AM}$.

56 **Un cylindre dans un cône**

On considère un cône de hauteur H et de rayon R et dans ce cône, un cylindre comme indiqué dans la figure ci-contre.
Le but de l'exercice est de déterminer le volume maximal du cylindre ainsi que les dimensions r et h rendant ce volume maximal.



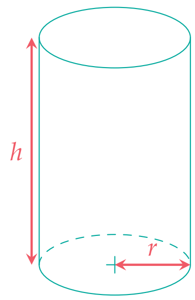
1) Démontrer que $h = \dfrac{H}{R}(R - r)$.

2) Étudier $\mathcal{V} : r \mapsto \mathcal{V}_{\text{cylindre}}$ sur son ensemble de définition, que l'on précisera. Répondre ensuite au problème posé.
Dans un premier temps, on pourra s'entraîner en commençant par étudier le cas particulier $H = 6$ et $R = 2$. On traitera ensuite le cas général.

3) Dans le cas où le volume du cylindre est maximal, quel est le rapport entre les volumes du cône et du cylindre ?

57 **Boîte de conserve avec couvercle**

On considère une boîte de conserve classique de forme cylindrique. Pour un volume $\mathcal{V}$ donné, on souhaite minimiser la quantité de métal utilisé pour confectionner cette boîte. On note r le rayon de la base et h la hauteur.



1) Démontrer que la surface de métal utilisé est :

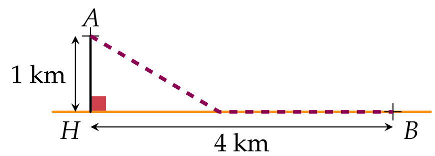
$$\mathcal{S}(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\mathcal{V}}{r}.$$

2) Étudier la fonction $\mathcal{S}$ sur son ensemble de définition, que l'on précisera.

3) En déduire les dimensions de la boîte répondant au problème.

4) Application numérique : tester les dimensions d'une boîte cylindrique choisie dans le placard dont le volume est donné (en mL ou cm^3).

58 Un homme, symbolisé par le point A, est en pleine mer. Il doit rejoindre le point B situé sur le rivage, symbolisé par la droite (HB), en un temps minimum. On donne $AH = 1$ km et $HB = 4$ km.
Sachant qu'il se déplace dans l'eau à une vitesse de $3\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et sur terre à une vitesse de $7\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, où doit-il accoster ?

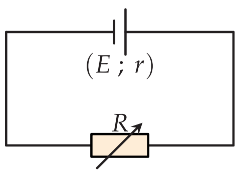


Vue de dessus.

59 **Puissance électrique**

On considère le circuit suivant, comprenant :

- un générateur de courant continu de force électromotrice E (en V) et de résistance interne r (en Ω) ;
- une résistance variable $R > 0$ (en Ω).



On note U (en V) et I (en A) la tension et l'intensité du courant aux bornes de la résistance (ou ici du générateur) ainsi que $P_u = UI$ (en W), la puissance utile restituée par le générateur, dissipée par la résistance.
Le but de l'exercice est de déterminer la puissance maximale P_u ainsi que la valeur de R rendant cette puissance maximale.

1) Rappeler la loi d'Ohm pour la résistance R.

2) Expliquer brièvement pourquoi $U = E - rI$.

3) Démontrer que $E = (R + r)I$ puis en déduire qu'une expression de P_u en fonction de R est :

$$P_u(R) = \frac{E^2 R}{(R+r)^2}.$$

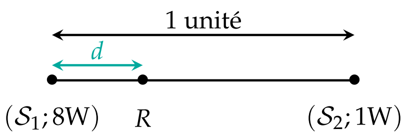
4) Étudier P_u sur son ensemble de définition puis répondre au problème posé.

60 Intensité acoustique

Dans le cas d'une source sonore isotrope (homogène) de puissance acoustique P (en W) qui rayonne dans tout l'espace, les ondes émises sont sphériques. La surface (en m²) d'une sphère de rayon r (en m) étant $4\pi r^2$ m², l'intensité reçue sur le front d'onde vaut, en W·m⁻² :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Soit R un récepteur placé entre deux sources sonores $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de puissances respectives 8 W et 1 W. On souhaite savoir où placer le récepteur pour avoir une intensité sonore minimale, ainsi que cette intensité.
La distance entre les deux sources est définie comme étant l'unité de longueur. On note d la distance entre R et $\mathcal{S}_1$.



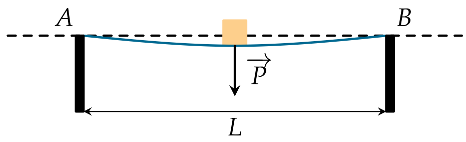
1) En partant du principe que $I = I_1 + I_2$, exprimer I en fonction de d.

2) Étudier la fonction I sur son ensemble de définition, que l'on précisera. On pourra se servir de l'égalité $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ pour factoriser $I'(d)$ ou, si besoin, d'un logiciel de calcul.

3) Répondre au problème posé.

61 Flexion d'une poutre

Une poutre de longueur L (en m) est placée sur deux appuis en A et B. Une charge de poids P (en N) étant placée en son milieu, elle se déforme.



On se place dans le repère orthonormé d'origine A et d'axe des abscisses (AB). Pour de petites déformations, la représentation graphique de l'arc de poutre déformée est donné, pour $x \in \left[0\,;\,\frac{L}{2}\right]$, par :

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{12}x^3 - \frac{PL^2}{16}x\right),$$

où E (en N·m⁻²) et I (en m⁴) sont respectivement le « module d'élasticité » et le « moment quadratique » de la poutre. Lorsque la poutre est de section constante et de matériau homogène, EI est une constante.

1) Déterminer la valeur maximale de la déformation de la poutre en fonction de E, I, P et L.

2) On suppose dans cette question que :
$EI = 20$ N.m², $P = 2$ N et $L = 4$ m.
Quel est, au point d'appui, l'angle formé par la poutre et l'horizontale ? (On pourra considérer la tangente de cet angle.)

Problèmes économiques

62 Profit total

Une entreprise fabrique des biens. On note q la quantité de biens produits, $C(q)$ le coût de production de q unités et $R(q) = qp$ la recette issue de la vente de ces q unités, au prix de p € l'unité. Pour finir, on note $\pi(q) = R(q) - C(q)$ le profit réalisé.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante au fait que π admette un maximum en q_0.

2) Expliquer comment on aurait pu intuitivement trouver cette condition sans faire aucun calcul.

3) On donne $C(q) = 0{,}01q^3 - 0{,}135q^2 + 0{,}6q + 15$ milliers d'euros et $p = 2{,}7$ milliers d'euros.

a) Déterminer graphiquement la quantité q_0 réalisant le profit maximal.

b) Retrouver ce résultat algébriquement.

Approfondir

63 Profit moyen

On reprend les notations de l'exercice précédent.
On appelle profit moyen et coût moyen correspondant à q unités les quotients :

$$\pi_M(q) = \frac{\pi(q)}{q} \quad \text{et} \quad C_M(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

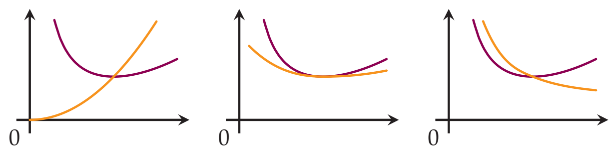
1) Démontrer que $\pi_M(q) = p - C_M(q)$.

2) Comment doit être le coût moyen pour avoir un profit moyen maximal ?

3) En déduire que si π_M admet un maximum en q_0, alors $C_M(q_0) = C'(q_0)$.

4) Cette condition est-elle suffisante ?
Quelle hypothèse faut-il rajouter pour qu'elle soit vraie ?

5) Parmi les trois configurations suivantes, en déduire la seule possible.
Coût moyen (C_M) Coût marginal (C')



6) Application numérique :
$C(q) = 0{,}01q^3 - 0{,}135q^2 + 0{,}6q + 15$ où $C(q)$ s'exprime en milliers d'euros.
Déterminer graphiquement la quantité q_0 réalisant le profit moyen maximal.

Démonstrations

64 Démonstration

On souhaite démontrer la propriété laissée en exercice p. 86 : on suppose que f admet un maximum local en a et on veut démontrer que $f'(a) = 0$.
On note J un intervalle ouvert, centré en a et contenu dans I : $J =]a - \varepsilon\ ;\ a + \varepsilon[$. On considère le taux d'accroissement, pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

1) Questions préliminaires

a) Relier les notions ayant la même signification :

- $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) \underset{\substack{h \to 0 \\ h<0}}{\to}$ • $f'_{\text{droite}}(a)$
- $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) \underset{\substack{h \to 0 \\ h>0}}{\to}$ • $f'_{\text{gauche}}(a)$

b) Lorsque f est dérivable en a, que peut-on dire de $f'_{\text{gauche}}(a)$ et $f'_{\text{droite}}(a)$?

2) Soit h tel que $a + h \in]a - \varepsilon\ ;\ a[$.

a) Quel est le signe de h ?

b) En déduire le signe du taux d'accroissement.

c) En déduire le signe de $f'_{\dots}(a)$.

3) Refaire le raisonnement sur l'intervalle $]a\ ;\ a + \varepsilon[$.

4) Conclure.

65 Théorème de Rolle

On souhaite démontrer la propriété suivante :
« Si g est une fonction continue sur $[u\ ;\ v]$ et dérivable sur $]u\ ;\ v[$ telle que $g(u) = g(v)$ alors il existe un réel $c \in]u\ ;\ v[$ tel que $g'(c) = 0$. »

1) Retranscrire la situation par un schéma. Identifier un réel c répondant au théorème.

2) 1er cas : g constante. Identifier la propriété du cours qui permet de conclure.

3) 2e cas : g non constante.

a) Expliquer pourquoi il existe deux réels c et d appartenant à $[u\ ;\ v]$ tels que $g(c)$ soit un maximum et $g(d)$ soit un minimum de g sur $[u\ ;\ v]$.

b) Justifier qu'au moins un des deux réels c ou d appartient à $]u\ ;\ v[$. (On pourra faire un raisonnement par l'absurde.)

c) Conclure.

66 Démonstration

On souhaite démontrer la propriété laissée en exercice p. 85 : on suppose que $f'(x) > 0$ sur I et on veut démontrer que f est strictement croissante sur I.

1) Soient u et v appartenant à I tels que $u < v$. On veut montrer que $f(u) \dots f(v)$.

2) On considère la fonction (astucieuse) suivante :

$$\begin{array}{rccl} g : & [u\ ;\ v] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - \dfrac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u). \end{array}$$

a) Démontrer que g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et donner la conclusion.

b) Pour tout $x \in]u\ ;\ v[$, calculer $g'(x)$.

c) Conclure.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Faire le lien entre le signe de $f'(x)$ et les variations de f
- Déterminer les extrema locaux d'une fonction et caractériser leur nature à l'aide de la dérivée
- Déterminer les variations d'une fonction sur son ensemble de définition à l'aide de sa dérivée
- Déterminer la position relative d'une courbe par rapport à sa tangente

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les exercices 67 et 68, on utilise le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-5\,;\,5]$, donné ci-contre.

x	-5		1		5
f	1	↗	2	↘	-2

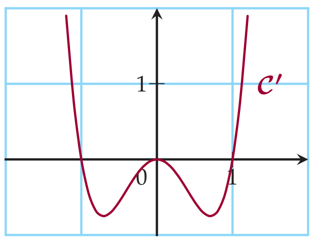
67 $f'(x) > 0$ sur :

ⓐ $[-5\,;\,1]$ ⓑ $]-5\,;\,1[$ ⓒ $[-5\,;\,1[$ ⓓ $]-5\,;\,1]$

68 $f'(x) \leq 0$ sur :

ⓐ $[1\,;\,5]$ ⓑ $]1\,;\,5[$ ⓒ $[1\,;\,5[$ ⓓ $]1\,;\,5]$

Pour les exercices 69 à 72, on utilise la courbe $\mathcal{C}'$ représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f, donnée ci-contre.



69 f admet un extremum local en :

ⓐ -1 ⓑ $\approx -0{,}7$ ⓒ 0 ⓓ $\approx 0{,}7$ ⓔ 1

70 f admet un maximum local en :

ⓐ -1 ⓑ 0 ⓒ 1

71 f admet un minimum local en :

ⓐ -1 ⓑ 0 ⓒ 1

72 $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse :

ⓐ -1 ⓑ 0 ⓒ 1

Pour les exercices 73 à 76, on considère une certaine fonction f pour laquelle $f'(x) = x^4 - x^2$.

73 Alors $f'(x)$ est :

(a) du même signe que $x^2 - 1$
(b) du signe contraire de $x^2 - 1$
(c) toujours positive
(d) toujours négatif

74 f admet un extremum local en :

(a) -1
(b) 0
(c) 1

75 f est croissante sur :

(a) $]-\infty\,;\,-1]$
(b) $[-1\,;\,0]$
(c) $[0\,;\,1]$
(d) $[1\,;\,+\infty[$

76 En 1, f admet :

(a) un maximum local
(b) un minimum local
(c) ni l'un ni l'autre

Pour les exercices 77 à 84, on considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$.

77 La fonction f est :

(a) définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
(b) définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$
(c) définie sur $\mathbb{R}^\star$ et dérivable sur $\mathbb{R}$
(d) définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$

78 $f'(x)$ est égal à :

(a) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{2} - 2$
(b) $x^2 + x - 2$
(c) -2
(d) $(x-1)(x+2)$

79 $f'(x)$ est :

(a) positive sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$, négative ailleurs
(b) négative sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$, positive ailleurs

80 Le minimum local de f :

(a) n'existe pas
(b) est atteint en $x = -2$
(c) est atteint en $x = 1$

81 Le maximum local de f :

(a) n'existe pas
(b) est atteint en $x = -2$
(c) est atteint en $x = 1$

82 Sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$:

(a) f est croissante
(b) f est décroissante
(c) f n'est pas monotone

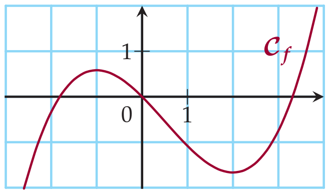
83 L'équation de $\mathcal{T}_0$, tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :

(a) $y = 2x$
(b) $y = 0$
(c) $y = -2x$

84 $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}_0$:

(a) toujours
(b) sur $]-\infty\,;\,0]$
(c) sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,0\right]$

Pour les exercices 85 à 87, on utilise la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, donnée ci-contre.



85 Graphiquement, l'équation $f(x) = 0$ admet pour ensemble solution :

(a) $\mathscr{S} = \{-1\,;\,2\}$

(b) $\mathscr{S} = \{-1{,}8\,;\,0\,;\,3{,}3\}$

86 Graphiquement, l'équation $f'(x) = 0$ admet pour ensemble solution :

(a) $\mathscr{S} = \{-1\,;\,2\}$

(b) $\mathscr{S} = \{-1{,}8\,;\,0\,;\,3{,}3\}$

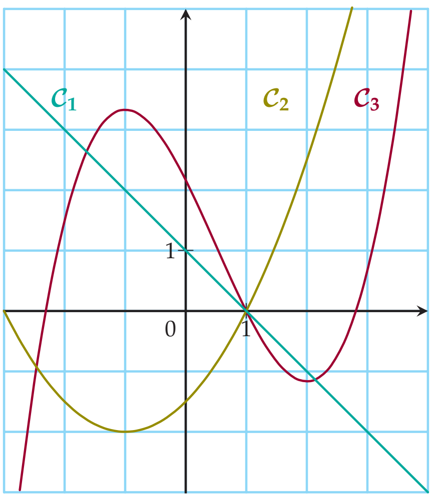
87 Graphiquement :

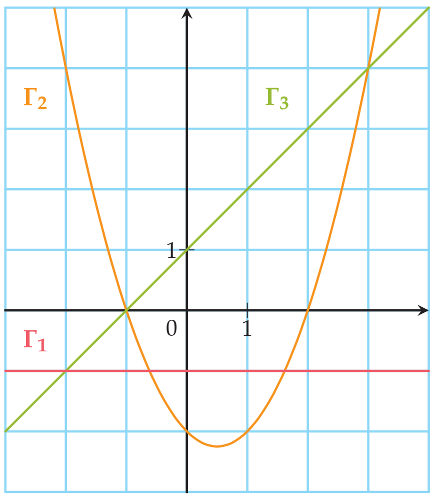
(a) $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,-2[$

(b) $f'(x) < 0$ sur $[-1\,;\,2]$

(c) $f'(x) > 0$ sur $[3\,;\,+\infty[$

Pour les exercices 88 à 90, on considère les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentant trois fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ ainsi que les courbes Γ_1, Γ_2 et Γ_3, représentant leur dérivée.





88 À la courbe $\mathcal{C}_1$, on associe :

(a) Γ_1

(b) Γ_2

(c) Γ_3

89 À la courbe $\mathcal{C}_2$, on associe :

(a) Γ_1

(b) Γ_2

(c) Γ_3

90 À la courbe $\mathcal{C}_3$, on associe :

(a) Γ_1

(b) Γ_2

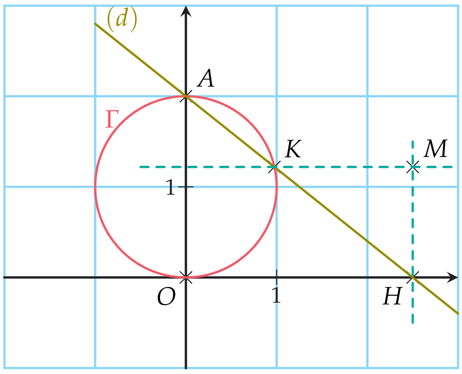
(c) Γ_3

Travaux pratiques

TP 1 La Versiera di Agnesi - La Sorcière d'Agnesi

INFO

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le point $A(0\ ;\ 2)$, le cercle Γ de diamètre $[OA]$ et une droite (d) passant par A, confondue avec l'axe des ordonnées ou bien de coefficient directeur $m \in \mathbb{R}^{\star}$ variable.
(d) coupe Γ en un point K et l'axe des abscisses en un point H. On note $M(x_H\ ;\ y_K)$.
Le but de l'exercice est d'étudier le lieu du point M lorsque (d) pivote autour de A.



1 Étude expérimentale

1) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrique dynamique.

a) Pour la construction de la droite (d). Il y a sensiblement deux manières :
- Créer un curseur m symbolisant le coefficient directeur de (d) puis tracer (d).
- Prendre H comme point mobile sur l'axe des abscisses puis tracer (d).

b) Faire afficher le lieu de M (selon m ou selon H).

2 Obtention et étude algébrique de la fonction

1) Donner une équation de la droite (d) en distinguant les deux cas décrits dans l'énoncé.

2) Donner une équation du cercle Γ.

3) En déduire les coordonnées des points H et K.

4) En déduire que M appartient à la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{2x^2}{x^2+4}.$$

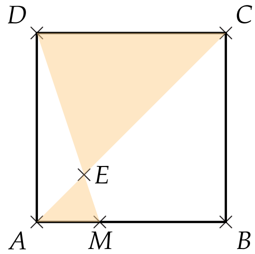
5) Déterminer les variations de f.

Versiera : le mot est visiblement ancien et il désigne une diablesse, une sorcière. Il provient, par aphérèse, d'**avversiera**, qui semble attesté en vieil italien. Il renvoie au latin **adversarius** (adversaire) qui désigne le diable.
En 1703, le mathématicien **Guido Grandi** (1671 - 1742) rédige en latin un ouvrage où il nomme cette courbe **versoria**, mot dérivé de **versare** (tourner, plier).
En 1748, la mathématicienne **Maria Gaetana Agnesi** (1718 - 1799), dans un ouvrage rédigé en italien, fait évoluer le mot et parle de **versiera**.
En 1801, **John Colson** (1680 - 1760), mathématicien de Cambrige, traduit le manuel d'Agnesi et confond les deux homonymes, nommant alors cette courbe **Witch Of Agnesi**.

TP 2 Problème d'optimisation

INFO

On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et M un point mobile sur le segment $[AB]$.
Les droites (DM) et (AC) se coupent en un point E.
Le but est de déterminer l'aire colorée minimale ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.



1 Étude expérimentale

1) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2) Comme l'on s'intéresse à l'aire de la surface colorée, on veut tracer la fonction

$$\ldots \mapsto \mathcal{A}_{AEM} + \mathcal{A}_{DEC}$$

Quelle variable choisir ?

3) Placer alors un point de coordonnées $(\ldots ; \mathcal{A}_{AEM} + \mathcal{A}_{DEC})$ et faire afficher son lieu lorsque M parcourt le segment $[AB]$.

4) Émettre une conjecture quant au problème posé.

2 Étude algébrique

On pose $AM = x$ et on note H et K les pieds des hauteur issues de E dans les triangles EAM et ECD.

1) À quel intervalle appartient x ?

2) Démontrer que :

$$EH = \frac{x}{1+x} \quad \text{et} \quad EK = \frac{1}{1+x}.$$

3) En déduire qu'une expression de l'aire colorée en fonction de x est :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x^2+1}{2(1+x)}.$$

4) Représenter graphiquement cette fonction afin de vérifier que son graphe coïncide bien avec le lieu obtenu lors de l'étude expérimentale.

5) Déterminer les variations de cette fonction sur son ensemble de définition puis répondre au problème posé.

TP 3 Lorsque le skieur n'accélère plus...

1 Condition nécessaire, condition suffisante

Soient P et Q deux propositions mathématiques.

- On dit que Q est une **condition nécessaire** pour P lorsque, pour que Q soit réalisée, il faut que P le soit.
- On dit que P est une **condition suffisante** pour Q lorsque, pour que Q soit réalisée, il suffit que P le soit.
- On dit que P est une condition nécessaire et suffisante de Q lorsque la réalisation de P garantit celle de Q et lorsque la non-réalisation de P garantit la non-réalisation de Q.

Travaux pratiques

Par exemple, casser des œufs est une condition nécessaire pour faire une omelette mais elle n'est pas suffisante : on doit aussi les mélanger.

Dans chacun des cas suivants, dire si P est une condition suffisante pour Q ou si P est une condition nécessaire pour Q :

1) P : « Brittany est une lycéenne » et Q : « Brittany est une élève de 1re S ».

2) P : « C'est le 1er janvier » et Q : « Le lycée est fermé ».

3) P : « ABC est un triangle rectangle » et Q : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».

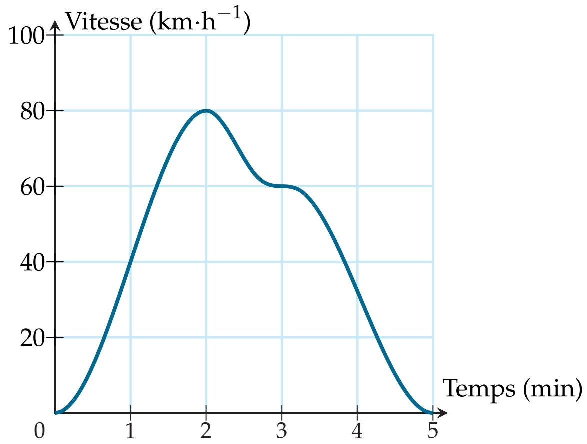
4) P : « Je peux conduire » et Q : « J'ai plus de 18 ans ».

5) P : « $z + x = z + y$ » et Q : « $x = y$ ».

2 Étude d'une situation

Un skieur possède un système de localisation qui lui permet d'obtenir sa vitesse instantanée en fonction du temps.

Une fois la piste dévalée, il obtient la courbe ci-dessous.



1) Chercher le lien entre vitesse instantanée et accélération instantanée.

2) L'annulation de l'accélération est-elle une condition nécessaire ou suffisante au fait que la vitesse soit maximale ? Argumenter.

Récréation, énigmes

Ils ont dit :

1) « In the fall of 1972 President Nixon announced that the rate of increase of inflation was decreasing. This was the first time a sitting president used the third derivative to advance his case for reelection. »

Hugo Rossi, *Mathematics Is an Edifice, Not a Toolbox*

Expliquer pourquoi Hugo Rossi parle de dérivée troisième.

2) « Les chiffres de ce soir manifesteront une amélioration de la situation avec une baisse tendancielle de l'augmentation du nombre de chômeurs. »

Nicolas Sarkozy, 26 mars 2012

Traduire cette phrase en utilisant la notion de fonctions dérivées.

ANALYSE

5

Notion de suite

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Utiliser le tableur
- Calculer des images par une fonction
- Utiliser des pourcentages
- Calculer avec des puissances

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Sur la copie d'écran de tableur ci-dessous, on a construit un tableau de valeur d'une fonction f.

B2 =(B1-2)^2/(B1+3)

	A	B	C	D	E
1	x	0	1	2	3
2	f(x)	1,33	0,25	0	0,17

1) Quelle est la valeur exacte du nombre contenu dans la cellule B2 ? dans la cellule E2 ?
2) Quelle est l'expression de la fonction f ?
3) Si on calcule les images de tous les entiers de 0 à 20, combien de valeurs a-t-on calculé ?

2 Soit n un nombre entier naturel. Compléter.

1) $25 \times 5^6 = 5^{\cdots}$
2) $2^n \times 2 = 2^{\cdots}$
3) $(4^n)^3 = 4^{\cdots}$
4) $\frac{1}{3} \times 3^n = 3^{\cdots}$

3 Dans une salle de spectacle, on accueillait 4 000 personnes par semaine en 2012.

1) En rénovant la salle en 2012, on avait envisagé une augmentation de la fréquentation de 15 % en 2013 puis 10 % en 2014.
Combien prévoyait-on de spectateurs pour 2014 ?
2) Cette rénovation n'a pas eu lieu et la fréquentation a diminué de 5 % en 2013 et à nouveau de 5 % en 2014. Combien cette salle a-t-elle accueilli de personnes en 2014 ?

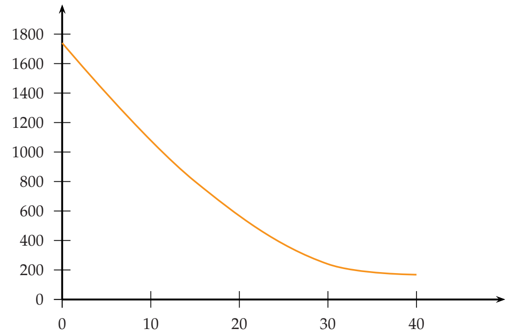
4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et n un entier positif.
Exprimer $f(n+1)$ en fonction de n et réduire l'expression obtenue.

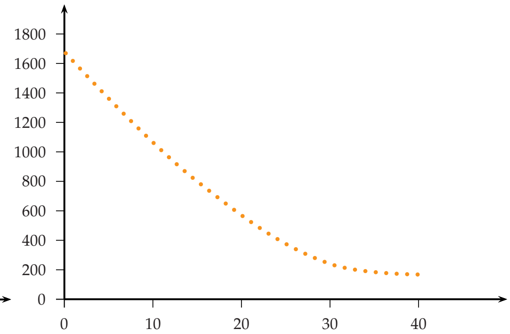
Voir solutions p. 333

Activités d'approche

DÉBAT 1 Choisir le bon modèle

Une entreprise fabrique des pièces détachées pour automobile. On note x le nombre de pièces fabriquées au cours d'une journée.
Le coût de production de x pièces en euros est noté $C(x)$.
Quelle représentation graphique sur l'intervalle $[0\,;\,40]$ vous semble la plus pertinente ?
Expliquer.





ACTIVITÉ 2 Et ensuite...

INFO

On considère les suites de nombres suivantes :

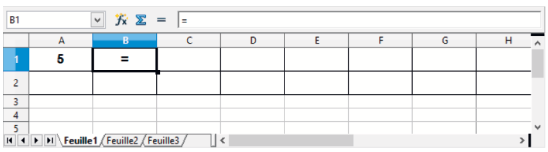
SUITE A :	5	8	11	14	17 ...	
SUITE B :	4	2	1	0,5	0,25 ...	
SUITE C :	1	1	2	3	5	8 ...

1) Pour chaque suite de nombres, donner les deux nombres suivants.

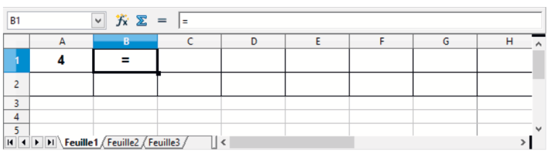
2) Déterminer le vingtième nombre de chaque suite.

3) On souhaite programmer un tableau pour calculer les termes de ces suites de nombres. Compléter les formules dans les copies d'écran de tableurs ci-dessous.

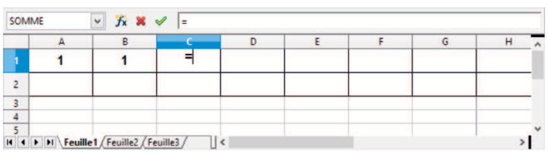
a) Pour obtenir les termes de la suite A en recopiant la formule entrée en B1 vers la droite.



b) Pour obtenir les termes de la suite B en recopiant la formule entrée en B1 vers la droite.



c) Pour obtenir les termes de la suite C en recopiant la formule entrée en C1 vers la droite.



4) Pour la suite A, on note le n-ième terme a_n ainsi on a $a_1 = 5$, $a_2 = 8\dots$
   a) Donner a_4.
   b) Représenter les 5 premiers termes de la suite en construisant les points de coordonnées $(n\ ;\ a_n)$ dans un repère orthogonal.
5) De la même façon, pour la suite B, on note le n-ième terme b_n ainsi on a $b_1 = 5$, $b_2 = 8\dots$
   a) Donner b_4.
   b) Représenter les 5 premiers termes de la suite en construisant les points de coordonnées $(n\ ;\ b_n)$ dans un repère orthogonal.

ACTIVITÉ 3 Quel est le meilleur contrat ?

Au moment de l'embauche, une entreprise propose à ses futurs employés deux types de contrat relatifs aux primes. Les primes sont versées une fois par an en fin d'année.

Contrat 1 : La première année, l'entreprise verse 1 500 €. Le montant de la prime augmente de 100 € chaque année.
Contrat 2 : La première année, l'entreprise verse 1 500 €. Le montant de la prime augmente de 5 % chaque année.

On appelle l'année de l'embauche l'année 0.
L'année suivant l'année de l'embauche est appelée l'année 1...

Partie 1 : Étude du contrat 1

1) Donner le montant de la prime à la fin de l'année 1.
   Donner le montant de la prime à la fin de l'année 2.
   Donner le montant de la prime à la fin de l'année 10.
2) On note u_n le montant de la prime à la fin de l'année n. On note u_{n+1} le montant de la prime à la fin de l'année $n+1$.
   a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.

Partie 2 : Étude du contrat 2

1) Donner le montant de la prime à la fin de l'année 1.
   Donner le montant de la prime à la fin de l'année 2.
   Donner le montant de la prime à la fin de l'année 10.
2) On note v_n le montant de la prime à la fin de l'année n. On note v_{n+1} le montant de la prime à la fin de l'année $n+1$.
   a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.

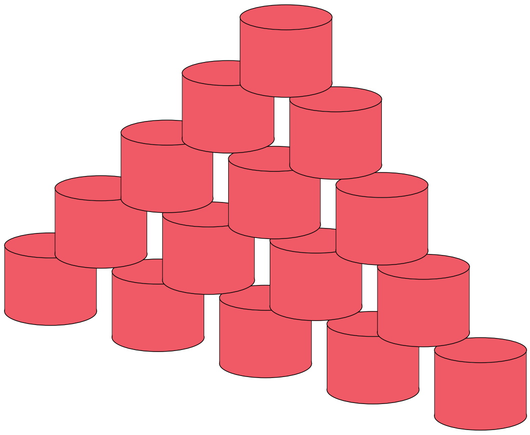
Partie 3 : Interprétation

En fonction du temps passé dans l'entreprise, quel contrat vous semble le plus intéressant ?

Activités d'approche

ACTIVITÉ 4 Le chamboule tout

INFO



Le joueur doit lancer une balle sur des boîtes empilées comme ci-dessus. Il doit en faire tomber le maximum.

Théo dit : « J'ai fait tomber toutes les boîtes en une seule fois et il y en avait 378. »

Léa répond : « Ce n'est pas possible. Moi aussi, je les ai toutes fait tomber et j'en ai compté 380. »

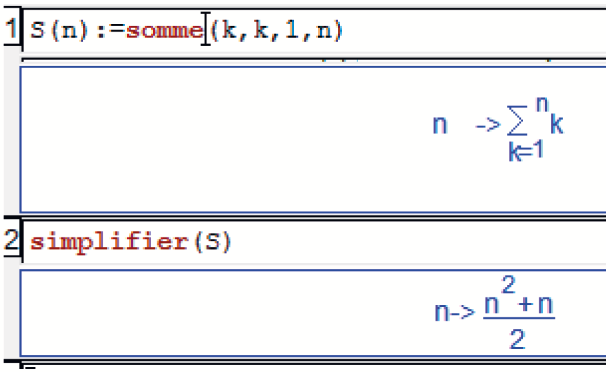
Soit u_n le nombre de boîtes dans la n-ième rangée en partant du haut.

1) Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?

2) Calculer le nombre de boîtes d'un chamboule tout à 6 étages. Exprimer ce nombre en fonction de termes de la suite (u_n).

Dans le reste de l'exercice, on notera $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n$.

3) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous.



a) Calculer la somme des 15 premiers entiers naturels à l'aide de la formule ci-dessus.

b) Vérifier la validité de la formule obtenue pour un chamboule tout à 6 étages.

c) Déterminer qui de Théo ou Léa a raison.

1. Modes de génération d'une suite ; représentation graphique

DÉFINITION : Suite numérique

Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
L'image de l'entier n par la suite est notée u_n. On l'appelle **terme d'indice** n de la suite.
Cette suite est notée (u_n) ou encore u.

NOTATION : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers positifs, appelés entiers naturels.

Exemple Voici la suite des nombres impairs : u_0= 1 ; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7\dots$
Le terme d'indice 0 de la suite u est 1, celui d'indice 1 est 3...

REMARQUE : Le mode de génération d'une suite est la façon dont cette suite est définie.

DÉFINITION : Suite définie de façon explicite

Définir une suite par une **formule explicite**, c'est exprimer chaque terme de la suite en fonction de n.

REMARQUE : Cela signifie que l'on peut calculer un terme de la suite sans connaître les termes précédents.

MÉTHODE 1 Étudier une suite définie de façon explicite ► Ex. 15 p. 117 et ► Ex. 35 p. 120

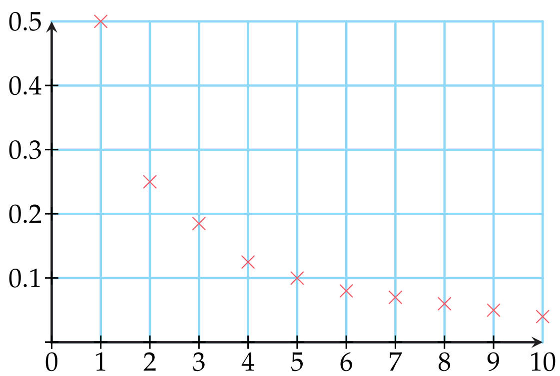
- Vérifier s'il existe des valeurs de n pour lesquelles u_n n'est pas défini.
- Calculer les termes de la suite en remplaçant n par sa valeur dans l'expression $f(n)$ donnée.
- Représenter les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ qui sont les points d'abscisse positive de la courbe C de f.

Exercice d'application

Calculer, puis représenter les dix premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

Correction

On remarque que cette suite n'est pas définie pour $n = 0$.



n	u_n
1	1,00
2	0,50
3	0,33
4	0,25
5	0,20
6	0,17
7	0,14
8	0,13
9	0,11
10	0,10

Cours - Méthodes

MÉTHODE 2 Utiliser la calculatrice dans l'étude d'une suite définie par une formule explicite

► Ex. 16 p. 118

Exercice d'application

Calculer la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

Correction

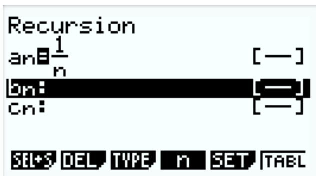
CASIO

Choisir le menu 6 (RECUR)

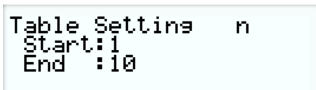
Appuyer sur [F3] pour choisir le type de suite :

Définie par sa forme explicite : [F1]

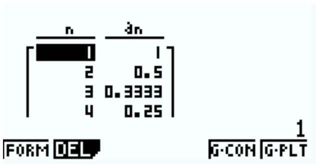
On complète la ligne a_n en tapant [F4] pour n



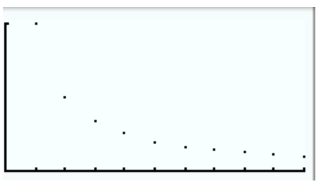
Réglage de la table de valeurs en tapant [F5] (SET) :



Taper [EXIT] pour revenir à la formule puis [F6] (TABL) pour voir la table de valeurs :

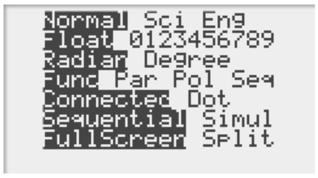


Visualisation de la représentation graphique : Taper [F6] (G.PLT) avec une fenêtre adaptée

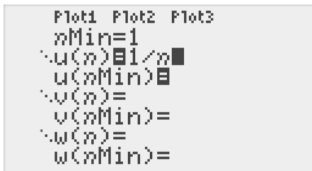


TI

Choisir le mode SEQ ou SUIT

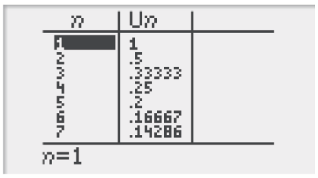


Taper sur la touche f(x) et entrer l'expression de la suite avec la touche [X,T,Θ,n] pour n :



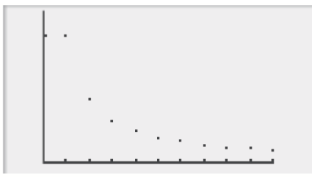
Réglage de la table de valeurs en tapant déf [TABLE] :

Taper [TABLE] pour voir la table de valeurs :



Visualisation de la représentation graphique :

Taper [GRAPH] avec une fenêtre adaptée



DÉFINITION : Suite définie par une relation de récurrence

Définir **une suite par une relation de récurrence**, c'est donner le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n.

REMARQUE : On ne peut alors calculer un terme que si l'on connaît le précédent, il faut calculer de proche en proche tous les termes à partir du premier.

MÉTHODE 3 Étudier une suite définie par récurrence

► Ex. 17 p. 118 et ► Ex. 38 p. 120

Algébriquement

On calcule les termes de proche en proche à partir du premier et d'une expression de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Graphiquement

- Construire la courbe représentant f.
- Construire la droite d'équation $y = x$.
- Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- Construire son image u_1.
- La reporter sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- Construire de la même façon u_2 puis u_3...

Exercice d'application

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6$.

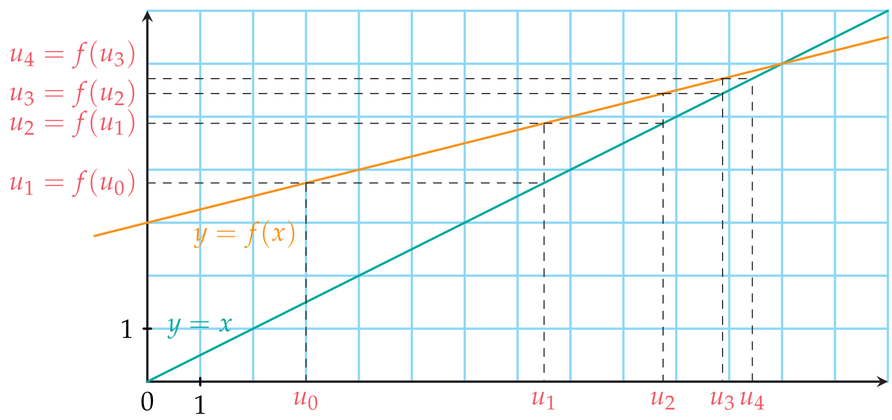
1) Calculer u_3.

2) Représenter graphiquement (u_n).

Correction

1) Pour calculer u_3, il faut calculer u_1, u_2 puis u_3 : $u_1 = 7$; $u_2 = \frac{19}{2}$; $u_3 = \frac{43}{4}$.

2)



REMARQUE : Une relation de récurrence peut aussi faire intervenir plusieurs des termes précédents, par exemple la célèbre suite de Fibonacci $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Pour définir la suite, la donnée du premier terme ne suffit pas, il faut en donner plusieurs. Ici par exemple $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

Cours - Méthodes

MÉTHODE 4 Utiliser la calculatrice dans l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence

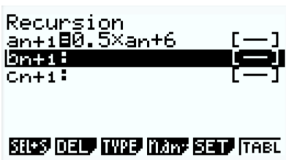
► Ex. 17 p. 118

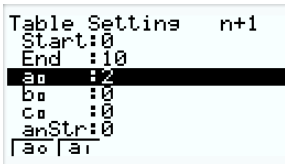
Exercice d'application

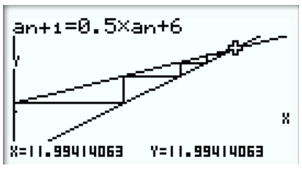
Calculer les dix premiers termes de la suite définie pour tout entier naturel n par :

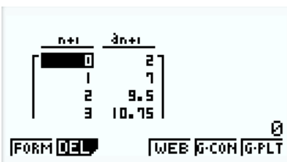
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 6. \end{cases}$$

Correction

<table>
<tr><th>CASIO</th><th>TI</th></tr>
<tr><td>
Choisir le menu 6 (RECUR)
Appuyer sur F3 pour choisir le type de suite :
Définie par une relation de récurrence F2
On complète la ligne a_{n+1} en tapant F2 pour a_n.


Réglage de la table de valeurs en tapant F5 (SET).
Penser à écrire le premier terme.


Taper EXIT pour revenir à l'écran précédent puis F6 (TABL) pour visualiser la table de valeurs et enfin F4 (WEB) pour la représentation graphique, en tapant EXE plusieurs fois :




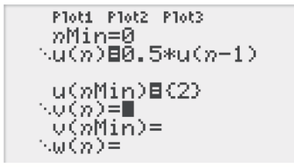
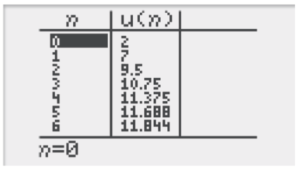
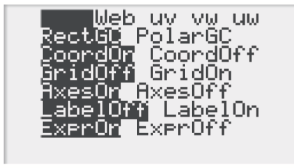
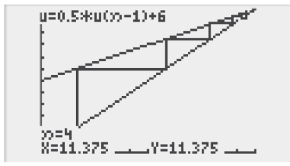
</td><td>
Taper f(x) pour rentrer l'expression.
Attention : écrire $u(n)$ en fonction de $u(n-1)$


Table de valeurs


Pour représenter la suite, aller dans FORMAT
Et choisir Web ou Esc


Taper GRAPH puis TRACE et la flèche de droite plusieurs fois pour tracer pas à pas.


</td></tr>
</table>

2. Les suites arithmétiques

DÉFINITION

On dit qu'une **suite** (u_n) **est arithmétique**, s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel, on a $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la **raison** de la suite arithmétique (u_n).

REMARQUE : Une suite arithmétique est définie par une relation de récurrence ; on ajoute toujours le même terme. Pour la définir, il faut donner son premier terme et sa raison.

Exemple La suite définie par $\begin{cases} u_3 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ pour $n \geq 3$ est une suite arithmétique de raison -5.

MÉTHODE 5 Démontrer qu'une suite est arithmétique

► Ex. 41 p. 121

Pour tout entier appartenant à $\mathbb{N}$, on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$.
On montre que cette différence est constante.

Exercice d'application

Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 + 3n$ est arithmétique.

Correction

Pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 + 3(n+1) - (2+3n) \\ &= 2 + 3n + 3 - 2 - 3n \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3.

MÉTHODE 6 Démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique

► Ex. 43 p. 121

On utilise un contre-exemple pour prouver qu'une suite n'est pas arithmétique.
On calcule deux différences de termes consécutifs et on montre qu'elles ne sont pas égales.

Exercice d'application

La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$ pour $n \geq 0$ est-elle une suite arithmétique ?

Correction

On calcule les trois premiers termes, par exemple :
$u_0 = 0 \quad u_1 = u_0 + 2 \times 0 = 0 \quad u_2 = u_1 + 2 \times 1 = 2$
Puis on calcule les différences :
$u_1 - u_0 = 0$ et $u_2 - u_1 = 2$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.
La suite (u_n) n'est pas arithmétique.

THÉORÈME : Forme explicite d'une suite arithmétique

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = u_0 + nr.$$
- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous les entiers naturels n et k, on a :
$$u_n = u_k + (n-k)\,r.$$

PREUVE

- Par définition, on sait que pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_n + r$.

Donc $\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ u_3 = u_2 + r \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$.

On ajoute alors membre à membre et on obtient :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + nr.$$

On retranche de chaque côté le terme $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ et on obtient $u_n = u_0 + nr$.

- Soient deux nombres entiers naturels n et k. En écrivant la propriété précédente pour k, on obtient :

$$u_k = u_0 + kr \text{ , soit } u_0 = u_k - kr \qquad \textbf{(1)}$$

D'autre part : $u_n = u_0 + nr$ donc en utilisant l'égalité **(1)** :
$u_n = u_k - kr + nr$ donc $u_n = u_k + (n-k)r$.

MÉTHODE 7 Déterminer la forme explicite d'une suite arithmétique

► Ex. 44 p. 121

Exercice d'application

1) Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison -4. Déterminer sa forme explicite.
2) Soit la suite arithmétique (v_n) de raison 5 et telle que $v_{10} = 7$. Déterminer sa forme explicite.

Correction

1) Pour tout entier naturel n, $u_n = 3 - 4_n$.
2) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_{10} + (n-10)r \Leftrightarrow v_n = 7 + 5(n-10) = 5n - 43$.

PROPRIÉTÉ

La somme des n premiers entiers naturels est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

PREUVE On peut exprimer la somme des n premiers entiers naturels de deux manières :

$$\begin{array}{rcll} S &=& 1 + 2 & + \dots + n \\ S &=& n + (n-1) & + \dots + 1 \\ \hline 2S &=& (n+1) + (n+1) & + \dots + (n+1) \end{array}$$

On additionne les deux égalités.

Puis on obtient $2S = n\,(n+1)$ d'où le résultat $S = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Notation : La somme de $k = 0$ à n des u_k se note $S = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Ainsi, la propriété précédente peut s'écrire $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Les suites géométriques

DÉFINITION

On dit qu'une **suite** (u_n) **est géométrique** s'il existe un réel q non nul tel que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n \times q = qu_n$.
Le réel q est appelé la **raison** de la suite géométrique (u_n).

REMARQUE : Une suite géométrique est définie par récurrence ; on multiplie toujours par le même terme. Pour définir une suite géométrique, il faut donner son premier terme et sa raison.

Exemples

- La suite des puissances de 10 est géométrique de raison 10.
- La suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ est géométrique de raison -1. Elle ne prend que les valeurs -1 et 1.

MÉTHODE 8 Démontrer qu'une suite est géométrique

▶ Ex. 51 p. 122

On calcule le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on montre qu'il est égal à une constante.

Exercice d'application

Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ est géométrique.

Correction

Pour tout entier n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+2}}{3^{2(n+1)}}}{\dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}}} = \frac{2^{n+2}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{2^{n+2-n-1}}{3^{2n+2-2n}} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{9}$.

MÉTHODE 9 Démontrer qu'une suite n'est pas géométrique

▶ Ex. 53 p. 122

On utilise un contre-exemple pour démontrer qu'une suite n'est pas géométrique.
On calcule deux quotients de termes consécutifs et on montre qu'ils ne sont pas égaux.

Exercice d'application

La suite définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \times 2n \end{cases}$ pour $n \geq 1$ est-elle géométrique ?

Correction

On calcule les trois premiers termes.
$u_1 = 1$, $u_2 = u_1 \times 2 \times 1 = 2$, $u_3 = u_2 \times 2 \times 2 = 8$.
Puis on calcule les quotients :
$\dfrac{u_2}{u_1} = 2$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{8}{2} = 4$ donc $\dfrac{u_3}{u_2} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$.
On en déduit que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Cours - Méthodes

THÉORÈME : Forme explicite d'une suite géométrique

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier naturel n on a :
$$u_n = u_0 q^n.$$
- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers naturels n et k on a :
$$u_n = u_k q^{n-k}.$$

PREUVE

- Par définition, on sait que pour tout entier naturel n, on a $u_n = qu_n$.
Donc $u_1 = qu_0,\ u_2 = qu_1,\ u_3 = qu_2,\ \ldots,\ u_n = qu_{n-1}$.
On multiplie membre à membre et on obtient :
$$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1} \times u_n = q^n \times u_0 \times u_1 \ldots \times u_{n-1}$$
On divise de chaque côté par le terme $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1}$ et on obtient $u_n = u_0 \times q^n$.
- Soient deux nombres entiers naturels n et k.
Comme $q \neq 0$, en écrivant la propriété précédente pour k, on obtient :
$$u_k = u_0 \times q^k \Leftrightarrow u_0 = \frac{u_k}{q^k}. \qquad \textbf{(1)}$$
D'autre part, $u_n = u_0 \times q^n$. Donc en utilisant l'égalité **(1)** :
$$u_n = \frac{u_k}{q^k} \times q^n \quad \text{donc} \quad u_n = u_k \times q^{n-k}.$$

MÉTHODE 10 Déterminer la forme explicite d'une suite géométrique

▶ Ex. 54 p. 122

Exercice d'application

1) Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2. Déterminer sa forme explicite.
2) Soit la suite géométrique (u_n) telle que $u_4 = 21$ et de raison 3. Déterminer sa forme explicite.

Correction

1) $u_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$
2) $u_n = u_4 q^{n-4} = 2 \times 3^{n-4}$

PROPRIÉTÉ : Somme des $n+1$ premières puissances d'un réel q non nul et $q \neq 1$

Pour tout réel q non nul et différent de 1, $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

PREUVE On écrit la somme des $n+1$ premières puissances d'un réel q non nul et différent de 1 :
$$S = 1 + q + \ldots + q^n \qquad \textbf{(1)}$$
On multiplie S par q et on obtient
$$qS = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}. \qquad \textbf{(2)}$$
On soustrait membre à membre les équations **(1)** et **(2)**, donc on obtient :
$$(1-q)\,S = 1 - q^{n+1}, \text{ c'est-à-dire } S = \frac{1-q^{n+1}}{(1-q)}.$$

Activités mentales

1 u est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. Calculer u_4.

2 u est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \sqrt{n-1}$.

Calculer les trois premiers termes de la suite.

3 u est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n-5)^2 + 2$. Calculer u_3.

4 u est la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$. Calculer u_1 puis u_2.

5 u est la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

6 u est la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n \end{cases}$.

1) Calculer u_1 puis u_2.
2) Écrire u_n en fonction de u_{n-1}.

7 u est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + 2 + ... + n$.

Calculer les quatre premiers termes de cette suite.

8 u est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} ... + \dfrac{1}{2^n}$.

Calculer les quatre premiers termes de cette suite.

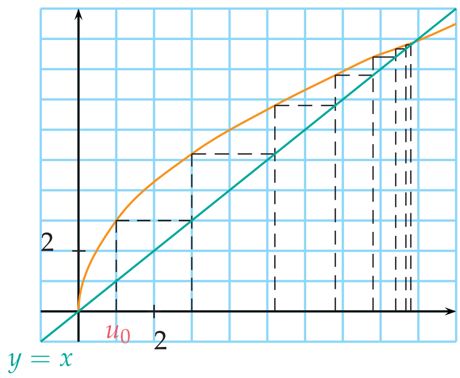
9 Calculer.

1) $\sum\limits_{k=0}^{3} k^2$
2) $\sum\limits_{k=0}^{3} (-1)^k$
3) $\sum\limits_{k=0}^{2} \dfrac{k}{k+1}$
4) $\sum\limits_{k=0}^{2} (2k+1) \times (-1)^k$

10 Compléter.

1) $3 + 4 + 5 + ... + 9 = \sum\limits_{k=...}^{...} ...$
2) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = \sum\limits_{k=...}^{...} ...$

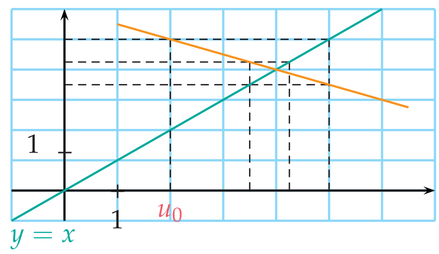
11 Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On a construit ci-dessous la courbe représentative de f et les premiers termes de la suite (u_n).



Lire graphiquement une valeur approchée de u_4.

12 On a construit ci-dessous la courbe représentative de f et les premiers termes de la suite (u_n).

Lire graphiquement une valeur approchée de u_3.



13 (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 16$.

Donner le terme u_6.

14 u est une suite géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$.

Donner le terme u_3.

Mode de génération d'une suite

15 ► MÉTHODE 1 p. 109

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer u_1, u_2 et u_3.

1) u définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \dfrac{3n+1}{2n}$.
2) u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
3) u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n$.

S'entraîner

16 ► MÉTHODE 2 p. 110 CALC

1) Pour chacune des suites ci-dessous, calculer u_0, u_1 et u_2.

a) u définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = 2n^2 - 5n$

b) u définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = (n+1) \times (-2)^n$

c) u définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = \sum_{i=0}^{n} (2i+1)$

2) À l'aide de la calculatrice, contrôler les résultats des questions **a)** et **b)**.

17 ► MÉTHODE 3 p. 111 ► MÉTHODE 4 p. 112

Pour chacune des suites ci-dessous :

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Écrire u_n en fonction de u_{n-1}.

3) À l'aide de la calculatrice, contrôler les résultats de la question **1**.

- u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3. \end{cases}$$
- u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -2u_n. \end{cases}$$
- u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = nu_n + 3. \end{cases}$$

18 **Suite définie par une relation de récurrence**

Pour chacune des suites ci-dessous :

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Écrire u_n en fonction de u_{n-1} pour les questions **a)** et **b)**.

a) u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = -u_n - 5. \end{cases}$$

b) u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n - 4. \end{cases}$$

c) u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}. \end{cases}$$

19 CALC

1) Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer son mode de génération et ses quatre premiers termes :

a) u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3$

b) v définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 = -5 \\ v_{n+1} = 2v_n + 4 \end{cases}$

c) w définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$

2) À l'aide de la calculatrice, contrôler les résultats précédents.

20 CALC

1) Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer son mode de génération et ses quatre premiers termes :

a) u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2}{u_{n-1}} + 1$ et $u_0 = 1$;

b) v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

2) À l'aide de la calculatrice, contrôler les résultats précédents.

21 INFO

On souhaite calculer à l'aide d'un tableur les premiers termes d'une suite v.

C2 =2*B1+1+B2

	A	B	C	D	E	F
1	n	1	2	3	4	5
2	u_n	-5	-2			

1) En recopiant la formule écrite en C2 vers la droite, quelle valeur obtient-on dans la case D2 ?

2) Définir la suite v.

22 INFO

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 + 3u_n. \end{cases}$$

Que doit-on écrire dans les cellules B2 et C2 pour qu'en étirant vers la droite le contenu de la cellule B2, on obtienne les premiers termes de la suite u ?

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	1	2	3	4
2	u_n					

23 Même énoncé que l'exercice **22** pour la suite w définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} w_0 = 4 \\ w_{n+1} = 5w_n - 2n. \end{cases}$$

24 Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 2. \end{cases}$
On donne la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	0	1	2	3	4	5	6
2	u_n	1	2,5	3,25	3,625	3,8125	3,90625	3,953125
3	S_n	1	3,5	6,75	10,375	14,1875	18,09375	22,046875

1) Quelle est la formule entrée dans la cellule C2 et recopiée vers la droite ?
2) Quelle est la formule entrée dans la cellule C3 et recopiée vers la droite ?

25 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2n^2 + (-1)^n$.
1) Écrire u_{n+1} en fonction de n.
2) Écrire u_{2n} en fonction de n.

26 On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{(-2)^{n-1}}{3^n}$.
1) Écrire v_{n-1} en fonction de n.
2) Écrire u_{n+2} en fonction de n.

27 Soit $w_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.
1) Calculer les 6 premiers termes de la suite.
2) Soit n un entier naturel. Exprimer w_{n+6} en fonction de w_n.

28 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n + 7$.
1) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

29 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2^n$.
1) Exprimer v_{n+1} en fonction de n.
2) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

30 Dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.
1) (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n + 5n - 1$
2) (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2$ et $u_{n+2} = (n+1)\,u_{n+1} + 5$

31 ALGO
On considère les deux suites de nombres suivants :
a) $4\,;2\,;0\,;-2\,;\ldots$
b) $4\,;2\,;1\,;0{,}5\,;\ldots$
1) Pour chacune des deux suites de nombres, quels semblent-être les deux termes suivants ?
2) Conjecturer une relation de récurrence permettant de passer d'un terme au suivant.
3) Conjecturer la forme explicite de chacune de ces suites si le premier terme est u_0.
4) Les algorithmes suivants permettent de calculer et afficher les premiers termes des suites précédentes. Associer l'algorithme correspondant à chacune des suites **a)** et **b)**.

ALGORITHME 1
```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR 4
  AFFICHER u
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u-2
    AFFICHER u
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

ALGORITHME 2
```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR 4
  AFFICHER u
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u/2
    AFFICHER u
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

32 ALGO
On considère une suite (u_n) dont un terme, d'indice choisi par l'utilisateur, est calculé à l'aide de l'algorithme ci-dessous.

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  AFFICHER u
  POUR i ALLANT_DE 0 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR 5*i-2/i
    FIN_POUR
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

1) La suite (u_n) est-elle définie par sa forme explicite ou par récurrence ?
2) Définir la suite (u_n).

S'entraîner

33 ALGO

On considère une suite (u_n) étudiée à l'aide de l'algorithme ci-dessous.

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR 5
  AFFICHER u
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR -u+2
    AFFICHER u
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

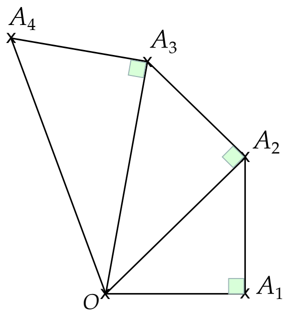
1) Comment est définie cette suite ?
2) Que fait cet algorithme ?
3) Modifier cet algorithme pour qu'il n'affiche que le terme dont l'indice a été choisi par l'utilisateur.

34 **La spirale de Pythagore**

On considère OA_1A_2 un triangle rectangle en A_1 tel que $OA_1 = A_1A_2 = 1$.

On construit ensuite une suite de points A_n, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que OA_nA_{n+1} soit un triangle rectangle en A_n et que $A_nA_{n+1} = 1$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = OA_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.



1) Calculer u_2 et u_3.
2) Définir la suite (u_n) par récurrence.
3) Conjecturer la forme explicite de la suite (u_n).

Représentation graphique

35 ► MÉTHODE 1 p. 109

Représenter graphiquement les trois premiers termes des suites ci-dessous définies par :

1) $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2) $u_n = \dfrac{5}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
3) $u_n = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

36 Représenter graphiquement les cinq premiers termes des suites ci-dessous dans un repère adapté.

1) u définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = 5 - 2n$.
2) u définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = \dfrac{1}{2}n^2 - 1$.

37 Représenter graphiquement les cinq premiers termes des suites ci-dessous dans un repère adapté.

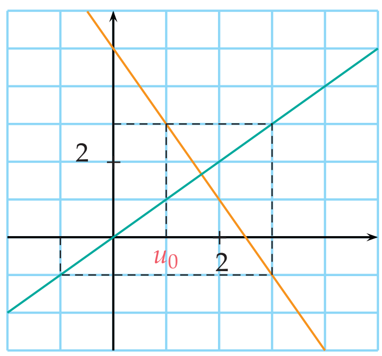
1) u définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.
2) u définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

38 ► MÉTHODE 3 p. 111

Construire les trois premiers termes des suites ci-dessous définies pour tout entier naturel n par une relation de récurrence :

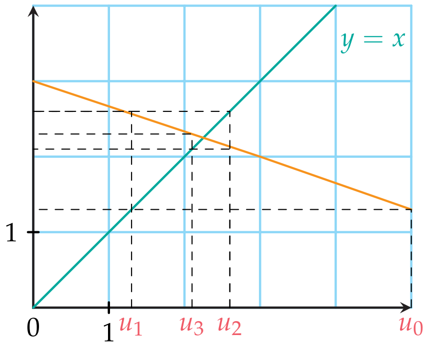
1) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$
dans un repère orthogonal (1 cm pour deux unités en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnées).
2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 5 \end{cases}$
dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

39 Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premiers termes d'une suite (u_n).



1) Quel est le premier terme de la suite ?
2) Par quelle relation de récurrence est définie (u_n) ?
3) Lire graphiquement la valeur de u_2.
4) Vérifier par le calcul.

40 Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premiers termes d'une suite (u_n).



1) Quel est le premier terme de la suite ?
2) Par quelle relation de récurrence est définie (u_n) ?
3) Lire graphiquement la valeur de u_2.
4) Vérifier par le calcul.

Suites arithmétiques

41 ► MÉTHODE 5 p. 113

Déterminer si les suites (u_n) ci-dessous sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1) $u_n = 4n + 7$
2) $u_n = n^2 + 1$
3) $u_n = \frac{n}{2} + 5$
4) $u_n = 8^n$

42 Déterminer si les suites (u_n) ci-dessous sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1) $u_n = \frac{n+1}{n}$
2) $u_n = \frac{2n+5}{2}$
3) $u_n = \frac{n^2+3n+2}{n+2}$
4) $u_n = \frac{n^2+1}{n+2}$

43 ► MÉTHODE 6 p. 113

Déterminer si les suites (u_n) ci-dessous, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$, sont arithmétiques. Si oui, donner la raison.

1) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -2 + 2u_n \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_0 = 1\,000 \\ u_{n+1} = 1 + u_n \end{cases}$

44 ► MÉTHODE 7 p. 114

Dans chacun des cas suivants, (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Écrire (u_n) en fonction de n.

1) $u_0 = -3$ $\quad r = \frac{1}{2}$
2) $u_0 = 20$ $\quad r = -2$
3) $u_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad r = -6$
4) $u_4 = 4$ $\quad r = \frac{1}{5}$

45 Dans chacun des cas suivants, (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Écrire (u_n) en fonction de n.

1) $u_0 = 3$ $\quad r = -3$
2) $u_0 = -1\,000$ $\quad r = 250$
3) $u_1 = \frac{1}{3}$ $\quad r = 3$
4) $u_4 = 0$ $\quad r = -\frac{1}{2}$

46 Soient deux termes d'une suite arithmétique (u_n). Écrire (u_n) en fonction de n et déterminer u_4.

1) $u_5 = 4$ $\quad u_{10} = 49$
2) $u_6 = 17$ $\quad u_{10} = 15$
3) $u_{10} = 90$ $\quad u_{100} = 99$

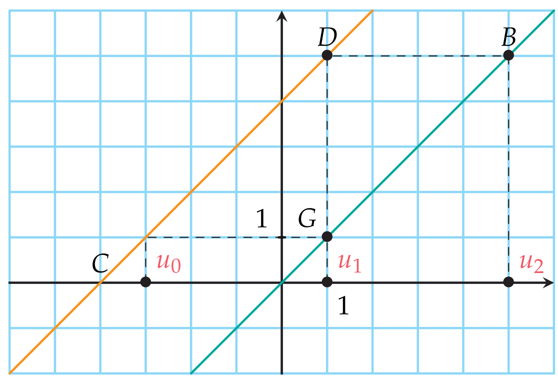
47 On connaît deux termes d'une suite arithmétique (v_n) : $v_{10\,000} = -26$ et $v_{20\,000} = -16$.

Déterminer $v_{4\,000}$.

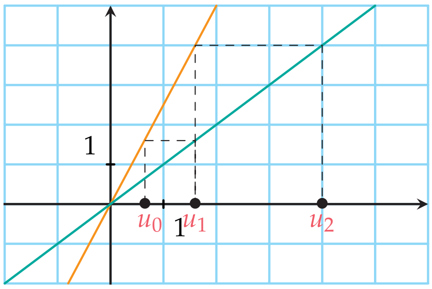
48

1) Parmi les constructions ci-dessous lesquelles concernent des suites arithmétiques ?
2) Donner le premier terme et la formule de récurrence de chaque suite.

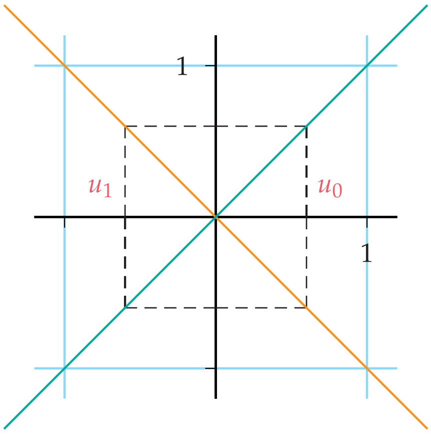
a)



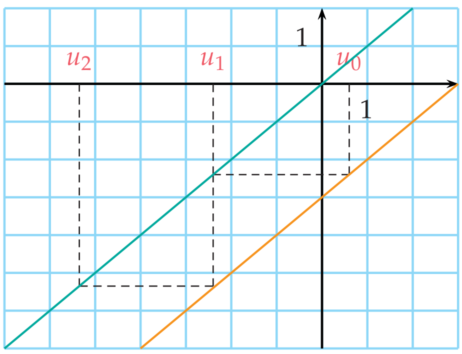
b)



c)



d)



49 Le but de l'exercice est de calculer $S = 2 + 6 + 10 + 14 + ... + 30$.

1) Montrer que $S = u_0 + u_1 + .. + u_7$ où (u_n) est une suite arithmétique que l'on définira.

2) En déduire que $S = 8 \times 2 + 4 \times (0 + 1 + ... + 7)$.

3) Terminer le calcul de S.

50 Calculer les sommes suivantes en utilisant la méthode proposée dans l'exercice **49**.

1) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 31$

2) $4 + 7 + 10 + 13 + ... + 34$

3) $\sum\limits_{i=0}^{8} 2i$

4) $\sum\limits_{k=2}^{8} (3 + 2k)$

Suites géométriques

51 ► MÉTHODE 8 p. 115

Déterminer si les suites (u_n), définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ ci-dessous, sont géométriques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1) $u_n = -4 \times 3^n$

2) $u_n = 3$

3) $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n+2}}$

4) $u_n = 8^{n+2}$

52 Déterminer si les suites u ci-dessous sont géométriques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2}{n} - 3^n$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^{n-1}$

53 ► MÉTHODE 9 p. 115

Déterminer si les suites (u_n) ci-dessous sont géométriques. Si oui, donner la raison.

1) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3 + 2u_n \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2u_n} \end{cases}$

54 ► MÉTHODE 10 p. 116

Dans chacun des cas suivants, (u_n) est une suite géométrique de raison q. Écrire (u_n) en fonction de n.

1) u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et sa raison $q = -3$

2) u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -3$ et sa raison $q = 0{,}02$

3) u est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = -1\,000$ et sa raison $q = -\dfrac{1}{10}$

4) u est définie pour tout entier naturel $n \geq 4$ par $u_4 = 7$ et sa raison $q = 9$

55 Soient deux termes d'une suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$. Écrire (u_n) en fonction de n. Attention, il peut y avoir plusieurs suites possibles.

1) $u_1 = -4$ $\quad$ $u_2 = -28$

2) $u_5 = \dfrac{1}{3}$ $\quad$ $u_7 = \dfrac{1}{27}$

3) $u_{10} = 8$ $\quad$ $u_8 = 2$

56 Soient deux termes d'une suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$. Écrire (u_n) en fonction de n. Attention, il peut y avoir plusieurs suites possibles.

1) $u_6 = 14$ $\quad$ $u_7 = -28$

2) $u_7 = \dfrac{5}{6}$ $\quad$ $u_8 = \dfrac{5}{12}$

3) $u_3 = -75$ $\quad$ $u_5 = -1\,875$

57 Soient deux termes d'une suite géométrique (v_n) tels que $v_7 = 16\,384$ et $v_9 = 1\,048\,576$.

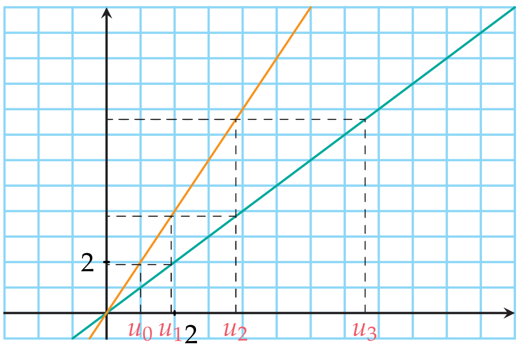
Déterminer les valeurs possibles pour v_{12}.

58 Soient deux termes d'une suite géométrique (v_n) tels que $v_4 = 25$ et $v_7 = 200$.

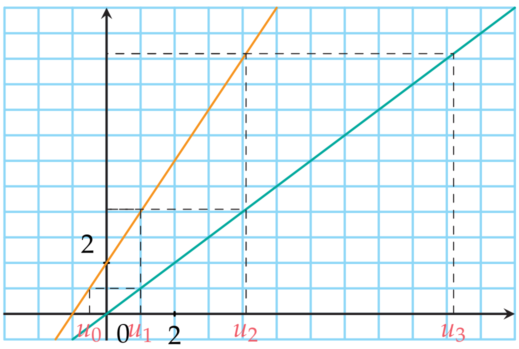
Déterminer une valeur possible pour v_9.

59 Parmi les constructions ci-dessous, lesquelles concernent des suites géométriques ?

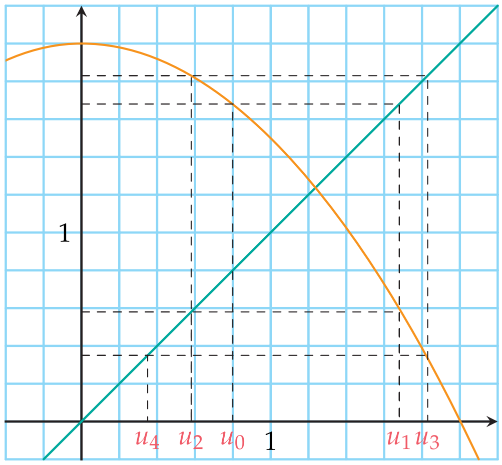
1)



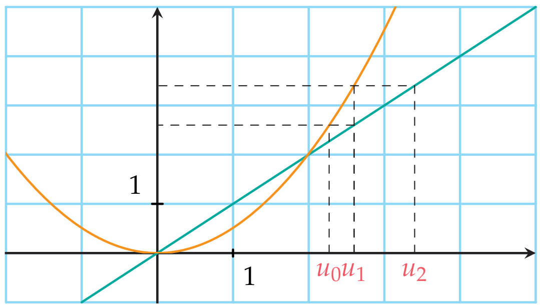
2)



3)



4)



60 Le but de l'exercice est de calculer :

$$S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{64}.$$

1) Montrer que $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_7$ où (u_n) est une suite géométrique que l'on définira.

2) En déduire que $S = 2 \times \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^7\right)$.

3) Terminer le calcul de S.

61 Calculer les sommes suivantes en utilisant la méthode de l'exercicce **60** :

1) $1 + 0,9 + 0,81 + 0,729 + 0,6561$

2) $100 + 10 + 1 + ... + 10^{-6}$

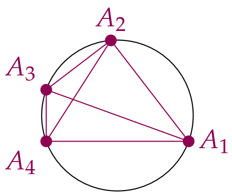
3) $\displaystyle\sum_{i=2}^{8} 2^i$

4) $\displaystyle\sum_{k=2}^{7} \left(3 \times 0,2^k\right)$

Approfondir

62

Sur un cercle quelconque, on place n points distincts $A_1, A_2, ..., A_n$ et on s'intéresse au nombre de segments que l'on peut tracer entre ces n points.



On nommera u_n ce nombre de segments possibles.

1) Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2) Établir une relation de récurrence permettant de définir la suite u.

63 **D'après BAC** INFO

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ n \times u_n = (n+1) \times u_{n-1} + 1 \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Quelle conjecture peut-on émettre sur la forme explicite de cette suite ?
3) Pour confirmer cette conjecture, on calcule à l'aide d'un tableur les premiers termes de cette suite.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	indice	0	1	2	3	4	5	6	7
2	terme de la suite	1	3	5	7	9	11	13	15

Quelle formule faut-il entrer en C2 et étirer vers la droite pour calculer des termes de la suite ?

Remarque : le résultat conjecturé pourra se démontrer en Terminale.

64 **D'après Bac** ALGO

La population de l'Allemagne (nombre de personnes résidant sur le territoire allemand) s'élevait à 81 751 602 habitants au premier janvier 2011.

De plus, on sait qu'en 2011, le nombre de naissances en Allemagne ne compensait pas le nombre de décès, et sans tenir compte des flux migratoires, on estime le taux d'évolution de la population allemande à $-0{,}22$ %.

On admet que cette évolution reste constante les années suivantes.

Les résultats seront arrondis à l'unité.

Partie A : À l'aide d'un algorithme

On propose l'algorithme ci-après.

```
Entrée
    Saisir un nombre entier naturel non nul S
Initialisation
    Affecter à U la valeur 81 751 602
    Affecter à N la valeur 0
Traitement
    Tant que U > S
        Affecter à U la valeur 0,9978 × U
        Affecter à N la valeur  N + 1
    Fin tant que
Sortie
Afficher N
```

On saisit en entrée le nombre 81 200 000.

1) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs à l'unité.

Étape	Initialisation	Étape 1	Étape 2	...
Test U > S				
U				
N				

2) Quel nombre obtient-on en sortie ?
3) Expliquer le rôle de cet algorithme.

Partie B : Par le calcul

On note u_n l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier $2011 + n$.

1) Déterminer u_0 et u_1.
2) a) Déterminer la nature de la suite (u_n).
   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3) En supposant que cette évolution de $-0{,}22$ % se confirme :
   a) calculer l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2035 ;
   b) à l'aide de la table de la calculatrice, déterminer en quelle année la population de l'Allemagne passera au-dessous du seuil de 81 200 000 habitants.

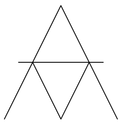
65 Des parents déposent 40 euros à la banque à la naissance de leur fils et ils décident qu'ils déposeront une fois par an de l'argent, en mettant chaque année 10 euros de plus que l'année précédente.

1) Quel sera le montant du dépôt la deuxième année ? la dixième année ?
2) Quelle somme y aura-t-il au total pour les 18 ans de leur fils ?

66 La population d'une ville augmente de 1 % chaque année. En 2000, la ville comportait 110 000 habitants. En 2014, combien la ville comportait-elle d'habitants ?

67

On prend cinq jeux de 54 cartes pour faire un très haut château de cartes. Combien peut-on faire d'étages au château ?



68 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_{n+1} = 2u_n + 5$ et $u_0 = 1$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3) On pose $v_n = u_n + 5$ pour tout entier naturel n. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
4) Exprimer v_n en fonction de n.
5) En déduire (u_n) en fonction de n.

69 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_{n+1} = -3u_n + 8$ et $u_0 = 6$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) On pose $v_n = u_n - 2$ pour tout entier naturel n. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire (u_n) en fonction de n.

70 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1. \end{cases}$$
On admet que, pour tout entier n, $u_n \neq 0$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ?
3) On pose $v_n = u_n - n$ pour tout entier naturel n. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
4) Exprimer v_n en fonction de n.
5) En déduire (u_n) en fonction de n.

71 Déterminer les réels a, b, c sachant que ce sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et que
$$\begin{cases} a + b + c = 54 \\ abc = 5\,670. \end{cases}$$

72 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n}. \end{cases}$$
On admet que, pour tout entier n, $u_n \neq 0$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel n.
3) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Donner sa raison et son premier terme.
4) Exprimer v_n en fonction de n.
5) En déduire l'expression du terme général de (u_n) en fonction de n.

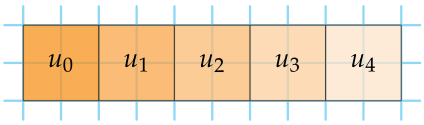
73 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{10u_n}{10 + u_n}. \end{cases}$$
On admet que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) On pose $v_n = \dfrac{5}{u_n}$ pour tout entier naturel n. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire l'expression du terme général de (u_n) en fonction de n.

74 Déterminer les réels a, b, c sachant que ce sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et que
$$\begin{cases} a + b + c = 84 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2\,370. \end{cases}$$

75 Déterminer sept nombres pairs consécutifs tels que la somme de ces nombres est égale à 98.

76 Les images ci-dessous indiquent le début de la construction de zones coloriées que l'on peut prolonger indéfiniment. Tous les rectangles ont la même largeur mais des longueurs différentes.
Ainsi, le premier rectangle est un carré de côté 2 carreaux, le deuxième rectangle a pour dimensions 2 carreaux par 4 carreaux, ...



1) Est-ce que la suite (u_n) des aires est arithmétique ?
2) Est-ce que la suite (v_n) des périmètres est arithmétique ?

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Calculer les termes d'une suite

- Calculer différents termes d'une suite définie de façon explicite ou définie par une relation de récurrence
- Calculer des termes de suite arithmétique ou géométrique
- Travailler avec des changements d'indice
- Comprendre et modifier un algorithme calculant des termes de suites

Étudier la nature d'une suite

- Prouver qu'une suite est arithmétique ou géométrique
- Prouver qu'une suite n'est pas arithmétique ou n'est pas géométrique à l'aide d'un contre-exemple
- Écrire l'expression d'une suite arithmétique ou géométrique en fonction de n

Représenter graphiquement une suite

- Définie de façon explicite
- Définie par une relation de récurrence

Étudier une somme de termes

- Utiliser le symbole $\sum$
- Calculer des sommes de termes de suites arithmétiques ou géométriques

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

77 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 2n$. On a alors :

(a) $u_1 = 1$ (b) $u_1 = 3$ (c) $u_2 = -3$ (d) $u_2 = 1$

78 La suite (u_n) est une suite :

(a) arithmétique (b) géométrique (c) ni l'une ni l'autre

Soit la suite (v_n) vérifiant pour tout entier naturel n la relation $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{2}$ et $v_0 = -3$.

79 La suite (v_n) est une suite :

(a) arithmétique (b) géométrique (c) ni l'une ni l'autre

80 La suite (v_n) est une suite définie par :

(a) sa forme explicite (b) une relation de récurrence

81 Le terme général de la suite (v_n) est :

(a) $v_n = -3 + \left(\sqrt{2}\right)^n$ (b) $v_n = -3 + \left(\sqrt{2}\right)n$ (c) $v_n = -3 \times \left(\sqrt{2}\right)^n$

Soit la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n^2+3}{n+1}$.

82 La suite (w_n) est :

(a) définie par récurrence (b) définie par sa forme explicite (c) ni arithmétique ni géométrique

83 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

(a) $w_{n+1} = \dfrac{n^2+4}{n+2}$ (b) $w_{n+1} = \dfrac{n^2+2n+4}{n+2}$ (c) $w_{n+1} = n+2-\dfrac{2n}{n+2}$

84 Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} - 3. \end{cases}$

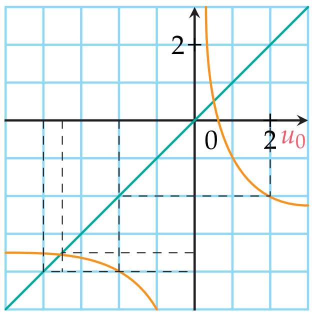
(a) Elle n'existe pas car on ne peut pas diviser par 0

(b) La suite (u_n) est définie par récurrence.

(c) $u_{10} = -3,561$

(d) Il s'agit d'une suite arithmétique de raison -3

85 On donne ci-dessous la construction des termes de la suite u_n.



Une valeur approchée de u_2 est :

(a) -2 (b) -4 (c) 4 (d) $-3,5$

86 La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme -3. Elle vérifie :

(a) $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(b) $u_9 = u_4 + 30$

(c) $u_n = -3 + 5n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(d) $u_0 + u_1 + ... + u_{26} = 1\,674$

87 La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 7. Elle vérifie :

(a) $\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = 4v_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(b) $v_9 = 20v_4$

(c) $v_n = 28n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(d) $v_0 + v_1 + ... + v_{10} = 2\,446\,675$

88 Soit S la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a $S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{3}\right)^i$. Alors :

(a) $S_2 = \dfrac{4}{9}$ (b) $S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + ... + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ (c) $S_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

Travaux pratiques

TP 1 Le meilleur prix

ALGO

On souhaite creuser un puits et l'on a fait deux types de devis.

Entreprise A : Le premier mètre coûte 35 € et chaque mètre supplémentaire revient à 5 € de plus que le précédent.

L'algorithme ci-contre permet de calculer le prix du k-ième mètre pour l'entreprise A.

```
VARIABLES
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  prix EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE k
  prix PREND_LA_VALEUR 35
  POUR i ALLANT_DE 2 A k
    DEBUT_POUR
    prix PREND_LA_VALEUR prix+5
    FIN_POUR
  AFFICHER prix
FIN_ALGORITHME
```

1) Modifier l'algorithme pour calculer le prix total des k mètres.

Entreprise B : 25 € pour le premier mètre et chaque mètre supplémentaire coûte 6 % de plus que le précédent.

2) Écrire un algorithme permettant de calculer le prix d'un forage de k mètres avec l'entreprise B.

3) Comparer le prix de revient du puits en fonction du nombre de mètres à creuser.

TP 2 Conjecture de Syracuse

ALGO

On considère la suite dont les termes sont calculés à l'aide de l'algorithme ci-dessous.

1) Compléter.

La suite de Syracuse est définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ si } \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ sinon} \end{cases}$$

2) Pour $u_0 = 2$, calculer les 7 termes suivants de la suite de Syracuse.

3) Pour $u_0 = 12$, calculer les 12 termes suivants de la suite de Syracuse. Que remarque-t-on ?

4) Pour $u_0 = 7$, émettre une conjecture sur les valeurs de u_n.

```
Entrée
U est un nombre entier strictement positif
N est un nombre entier
I est un nombre entier
Initialisation
Saisir U
Saisir N
Traitement
Pour i allant de 1 à N
   Si U est pair
      Alors Affecter à U la valeur U/2
      Sinon Affecter à U la valeur 3*U+1
   Fin Si
   Affecter I
   Afficher U
Fin Pour
```

Conjecture de Syracuse : Pour tout nombre entier strictement positif u_0, les termes de la suite de Syracuse prennent tous la valeur 1 à partir d'un certain rang.
Malgré une simplicité apparente, cette conjecture n'a toujours pas été démontrée ou démentie.

TP 3 Évolution d'un capital

INFO

M. Simon décide de faire des économies et pour cela il avait prévu de déposer, chaque début de mois, 100 euros sur un compte en banque. Le capital total déposé est rémunéré chaque mois à un taux mensuel de 1,019 %.

Le 1er janvier 2015, il dépose 100 euros sur un livret rémunéré à un taux mensuel de 1,019 %.

Répondre aux questions suivantes à l'aide d'un tableur en arrondissant chaque valeur à l'euro près.

1) Quelle somme aura-t-il sur son livret au 1er janvier 2016 ? En déduire le taux annuel.

2) Dès le 1er février, il décide de verser chaque mois 100 euros de plus sur son livret. Quelle somme aura-t-il sur son livret au 1er janvier 2016 ?

3) Malheureusement, des difficultés financières ne lui ont pas permis des économies constantes et, pendant 15 mois consécutifs, il n'a rien versé sur son compte. Pour tous les autres mois, le versement a toujours été de 100 euros. Au bout de 120 mois de placement, cela a représenté une perte d'environ 2 000 euros, par rapport au plan initialement prévu.

a) Quel capital aurait dû récupérer M. Simon au bout des 120 mois s'il n'avait pas eu de difficultés financières ?

b) Déterminer quels sont les mois pendant lesquels il n'a pas versé les 100 euros.

TP 4 Grande ou petite tornade ?

INFO

Au cours de son évolution, une tornade se déplace dans un corridor de quelques centaines de mètres de large sur quelques kilomètres de long.

DOCUMENT 1

L'échelle de Fujita est une échelle servant à classer les tornades par ordre de gravité, en fonction des dégâts qu'elles occasionnent. Une partie de cette échelle est présentée dans le tableau ci-dessous.

Catégorie	Vitesse des vents en km.h^{-1}	Dégâts occasionnés
F0	60 à 120	**Dégâts légers :** dégâts sur cheminées, arbres, fenêtres...
F1	120 à 180	**Dégâts modérés :** automobiles renversées, arbres déracinés...
F2	180 à 250	**Dégâts importants :** toits arrachés, hangars et dépendances démolis...
F3	250 à 330	**Dégâts considérables :** murs extérieurs et toits projetés, maisons et bâtiments de métal effondrés, forêts abattues...
F4	330 à 420	**Dégâts dévastateurs :** murs effondrés, objets en acier ou en béton projetés comme des missiles...
F5	420 à 510	**Dégâts incroyables :** maisons rasées ou projetées sur de grandes distances, murs extérieurs et toits arrachés sur de gros bâtiments...

DOCUMENT 2

À partir des mesures relevées lors d'observations de phénomènes semblables, des météorologues ont admis la règle suivante : « la vitesse des vents dans les tornades diminue régulièrement de 10 % toutes les 5 minutes ».
On appelle « durée de vie » d'une tornade le temps nécessaire, depuis sa formation, pour que la vitesse des vents devienne inférieure à 120 km.h^{-1}.

Travaux pratiques

Lors de la formation d'une tornade, on a mesuré la vitesse des vents par un radar météorologique et on a trouvé une vitesse initiale de 420 km.h^{-1}.

L'objectif de ce problème est d'estimer la durée de vie de cette tornade.

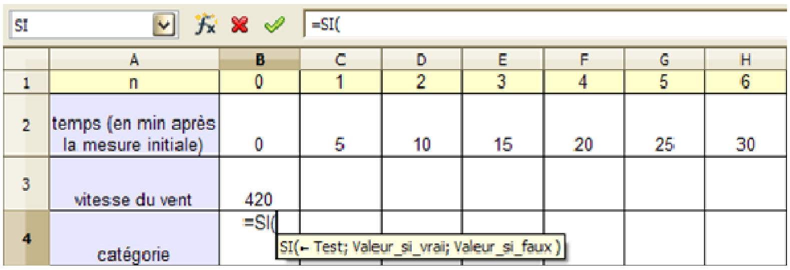
Les résultats seront arrondis à 1 km.h^{-1}.

1) **a)** Cinq minutes après la mesure initiale, la vitesse des vents est de 378 km.h^{-1}.
Vérifier que ce résultat correspond à la règle admise.
À quelle catégorie appartient la tornade à ce moment-là ?

b) Vérifier que, quinze minutes après la mesure initiale, cette tornade occasionne des dégâts classés comme « dégâts considérables ».

2) Pour déterminer la durée de vie de cette tornade, un étudiant propose d'utiliser une feuille de tableur pour déterminer la catégorie d'une tornade.

a) À l'aide d'une feuille de tableur comme présentée ci-dessous, calculer la vitesse des vents en fonction du temps écoulé après la mesure initiale et donner la catégorie de la tornade correspondante.
On utilisera la fonction SI pour la catégorie de la tornade.



SI =SI(

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	0	1	2	3	4	5	6
2	temps (en min après la mesure initiale)	0	5	10	15	20	25	30
3	vitesse du vent	420						
4	catégorie	=SI(						

b) Quelle est la durée de vie de cette tornade ?

3) Un autre étudiant propose de modéliser le phénomène par une suite géométrique de raison q.

a) Donner le premier terme et la raison de la suite géométrique proposée par l'étudiant.

b) On désigne par (v_n) la suite géométrique proposée par l'étudiant. Exprimer v_n en fonction de n.

c) Vérifier la durée de vie de cette tornade à l'aide de la table de la calculatrice.

Récréation, énigmes

L'échiquier

La légende se situe 3 000 avant J.-C. Le roi Belkib (Inde) promit une récompense fabuleuse à qui lui proposerait une distraction qui le satisferait. Le sage Sissa lui proposa le jeu d'échec. Le souverain demanda à Sissa ce qu'il voulait comme récompense. Sissa demanda de mettre 1 grain de blé sur la première case, puis le double sur la deuxième, sur la troisième le double de celui sur la deuxième… et ainsi jusqu'à la dernière case de l'échiquier.
Un de ses conseillers lui expliqua qu'il venait de conduire son royaume à sa perte : les récoltes de l'année ne suffiraient pas à récompenser Sissa.

1) Combien de grain de blé faudra-t-il pour récompenser Sissa ?
2) Sachant qu'un grain de blé pèse en moyenne à 0,020 g, quelle est la masse de la récompense de Sissa ?
3) Comparer avec la production mondiale de blé.

ANALYSE 6

Comportement global d'une suite

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Étudier le signe d'une expression
- Déterminer la nature d'une suite
- Étudier les variations d'une fonction
- Exprimer u_{n+1} en fonction de n ou de u_n

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Étudier le signe des expressions suivantes :

1) $A(x) = -3x + 4$
2) $C(x) = \dfrac{3-x}{2x+1}$
3) $B(x) = 2x^2 + 3$
4) $D(x) = x(x-1)$
5) $E(x) = x^5 - x^3$

2 Étudier les variations des fonctions.

1) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 + 5x - 30$
2) f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{3-x}{2x+1}$
3) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x + 3$

3 Étudier la nature de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

1) $u_n = 3n^2 + 4$
2) $u_n = 3n - 5$
3) $u_{n+1} = 2 - u_n$ et $u_0 = 1$
4) $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 1$

4 Écrire dans chacun des cas suivants u_{n+1} en fonction de n.

1) $u_n = -4n + 2$
2) $u_n = 2n^2 - 3$
3) $u_n = 3^n \times 5$
4) $u_n = \dfrac{1+n}{1+3n}$

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Gestion de stock dans une bibliothèque

INFO CALC

Début 2014, une bibliothèque dispose de 30 000 ouvrages. Elle change de locaux et va dorénavant pouvoir stocker jusqu'à 100 000 ouvrages.
Chaque année, la commune souhaite acheter des livres à la bibliothèque pour renouveler son stock.
Elle étudie trois cas de figures.

1er cas :
Chaque année, la commune achète 2 000 nouveaux livres à la bibliothèque et les bibliothécaires décident de se débarrasser de 5 % des ouvrages, trop abîmés.

2e cas :
Chaque année, la commune achète 1 500 nouveaux livres à la bibliothèque et les bibliothécaires décident de se débarrasser de 5 % des ouvrages, trop abîmés.

3e cas :
Chaque année, la commune achète 1 000 nouveaux livres à la bibliothèque et les bibliothécaires décident de se débarrasser de 5 % des ouvrages, trop abîmés.

Pour chaque cas ci-dessus :

1) On appelle u_n le nombre d'ouvrages l'année $2014 + n$. Exprimer u_n en fonction de n.

2) Sur un tableur ou une calculatrice, faire apparaître les 30 premiers termes de la suite et tracer la représentation graphique de la suite.

3) Que peut-on dire de l'évolution du stock ?

DÉBAT 2 Déborde ou pas ?

Cette activité pourra être complétée par l'exercice **61**.

On remplit une bouteille d'eau d'un litre de la façon suivante :

On verse $\frac{1}{2}$ litre, puis $\frac{1}{4}$ litre, puis $\frac{1}{8}$ litre et ainsi de suite...

1) L'eau va-t-elle déborder de la bouteille ?

2) Et si la bouteille a une contenance de 0,95 litre ?

ACTIVITÉ 3 Lorsque n devient de plus en plus grand...

CALC

1) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 9 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer les 30 premiers termes de la suite (u_n).

b) Dans un repère, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = 0,5x + 3$ et construire les 5 premiers termes de la suite (u_n).

c) À l'aide des éléments précédents, que pouvez-vous conjecturer sur le comportement de la suite (u_n) lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

2) Reprendre les mêmes questions avec la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 4 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 3v_n - 4.$$

ACTIVITÉ 4 Ça pousse

CALC

Un plant de maïs de 10 cm est replanté dans un jardin. On s'intéresse à l'évolution de la hauteur en mètre de ce plant de maïs h_n en fonction du nombre de jours écoulés n, la taille du plant de maïs étant donnée par :

$$h_n = -1,9 \times 0,978^n + 2.$$

1) À l'aide de votre calculatrice, déterminer les 200 premiers termes de la suite.

2) À l'aide de votre table de valeurs, est-il possible de déterminer le temps nécessaire pour obtenir un plant de 1 m, de 1,5 m, de 2 m, de 2,50 m ?

3) Que peut-on dire de l'évolution de la taille du plant de maïs ?

ACTIVITÉ 5 C'est l'heure de la piqûre...

INFO CALC

Pour soigner la douleur, on injecte toutes les heures à un patient un médicament par piqûre intraveineuse. Chaque dose contient 0,16 mg de substance active qui se répartit uniformément et instantanément dans le sang. Le corps élimine 20 % de la substance chaque heure.
On considère n le nombre d'heures écoulées après la première injection ($n \in \mathbb{N}$) et u_n la quantité en mg de substance active présente dans le sang à l'instant n.

1) Donner u_0 et calculer u_1.

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3) **a)** À l'aide de la table de la calculatrice ou d'un tableur, conjecturer l'évolution des termes de la suite lorsque n devient très grand.

b) Interpréter ce résultat quant au dosage du médicament pour le patient.

Cours - Méthodes

1. Sens de variations

A. Cas général

DÉFINITION

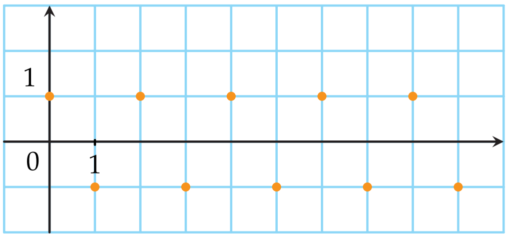
On dit qu'une suite u est **croissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.
On dit qu'une suite u est **décroissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.
On dit qu'une suite u est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

REMARQUES :

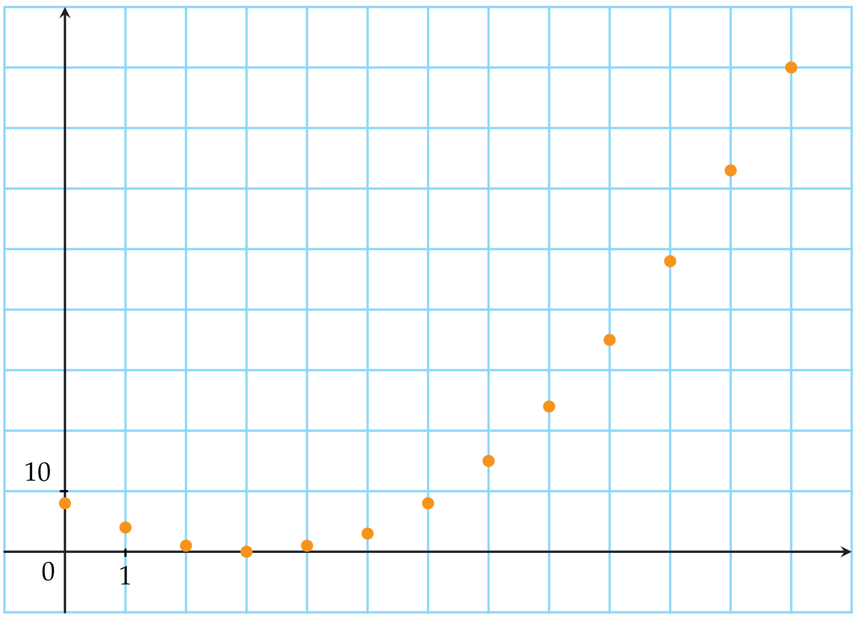
- On définit de même une suite strictement monotone en utilisant des inégalités strictes.
- Une suite peut être monotone à partir d'un terme (voir 2e exemple).

Exemples

- La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.
  Les termes d'indice pair sont égaux à 1 et les termes d'indice impair sont égaux à -1.



- La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 9$ est croissante à partir de l'indice 3.



MÉTHODE 1 Montrer qu'une suite est monotone par différence de termes

► Ex. 10 p. 141

On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ puis on regarde son signe :
- si cette différence est positive, alors la suite est croissante ;
- si cette différence est négative, alors la suite est décroissante ;
- si cette différence change de signe, alors la suite n'est pas monotone.

Exercice d'application

Étudier la monotonie de la suite v définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = n^2 - 8n + 18.$$

Correction

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)^2 - 8(n+1) + 18 - \left(n^2 - 8n + 18\right) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 18 - n^2 + 8n - 18 \\ &= 2n - 7. \end{aligned}$$

Or $2n - 7 \geq 0$ pour $n \geq 3,5$ donc pour $n \geq 4$:
$v_{n+1} - v_n \geq 0$, c'est-à-dire $v_{n+1} \geq v_n$.
La suite n'est pas monotone, cependant elle est croissante à partir du terme d'indice 4.

MÉTHODE 2 Montrer qu'une suite est monotone par quotient de deux termes

► Ex. 12 p. 141

Pour une suite à termes strictement positifs, on calcule le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ puis on compare avec la valeur 1 :
- si ce quotient est supérieur à 1, alors la suite est croissante ;
- si ce quotient est inférieur à 1, alors la suite est décroissante ;
- si cela dépend des valeurs de n, alors la suite n'est pas monotone.

Exercice d'application

Étudier la monotonie de la suite w définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{1}{3^n}.$$

Correction

Pour tout entier naturel n positif, les termes de la suite sont strictement positifs.

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{3^n}{3^n + 1} = \frac{3^n}{3^n \times 1} = \frac{1}{3} < 1.$$

Donc pour tout entier naturel n, $w_{n+1} \leq w_n$.
La suite w est donc décroissante.

PROPRIÉTÉ : Cas d'une suite définie par $u_n = f(n)$

La suite u est définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0\,;\,+\infty[$.
Si f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite u est croissante.
Si f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite u est décroissante.

Remarque : On prouve de même une stricte monotonie en utilisant la stricte monotonie de f.

MÉTHODE 3 Montrer qu'une suite est monotone par l'étude d'une fonction

► Ex. 14 p. 141

Si u est définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$, alors on étudie les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice d'application

Étudier la monotonie de la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = -\frac{1}{4n+1}.$$

Correction

On s'intéresse à la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{4x+1}.$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f'(x) = \dfrac{4}{(4x+1)^2} > 0$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et u est croissante.

MÉTHODE 4 Montrer qu'une suite n'est pas monotone

► Ex. 16 p. 141

On utilise un contre-exemple.

Exercice d'application

Étudier la monotonie de la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 2 \times (-3)^n$.

Correction

$u_0 = 2 \times (-3)^0 = 2\,;\quad u_1 = 2 \times (-3)^1 = -6$

$u_2 = 2 \times (-3)^2 = 18$

$u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$. Donc la suite u n'est pas monotone.

B. Cas particulier

PROPRIÉTÉ : Cas d'une suite arithmétique

Soit la suite u arithmétique de raison r non nulle et de premier terme u_0.
Si r est négative, alors la suite u est décroissante.
Si r est positive, alors la suite u est croissante.

PREUVE Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Par définition, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Donc $u_{n+1} - u_n = r$.

- Si r est négative, alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$. Dans ce cas, u est décroissante.
- Si r est positive, alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$. Dans ce cas, u est croissante.

PROPRIÉTÉ : Cas d'une suite géométrique

Soit la suite u géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite u est décroissante.
Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, alors la suite u est croissante.
Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite u est croissante.
Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, alors la suite u est décroissante.
Si $q < 0$, alors la suite u n'est pas monotone.

PREUVE

- Soit la suite u géométrique de raison q et de premier terme u_0 avec $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$.
  Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$ et $u_n > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1$ donc dans ce cas, u est décroissante.
- L'exercice 53 présente les preuves pour les autres cas.

Exemples

- La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = -2n + 5$ est arithmétique de raison -2. Elle est donc décroissante.
- La suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ est géométrique de raison $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ et de premier terme $v_n = -2 < 0$. Elle est donc croissante.

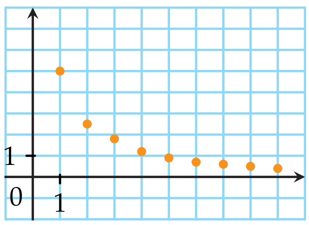
2. Comportement à l'infini

DÉFINITION INTUITIVE : Suite convergente

On dit qu'une suite **converge vers** l lorsque ses termes se rapprochent de plus en plus de l lorsque n devient très grand (cela signifie $\underset{n \to +\infty}{u_n} \to l$).

Exemples

- (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel
  par $u_n = \dfrac{5}{n}$.
- Lorsque n tend vers $+\infty$, u_n tend vers 0 ($\underset{n \to +\infty}{u_n} \to 0$).
  On dit que (u_n) converge vers 0.



VOCABULAIRE : Si une suite (u_n) converge vers l, on dit que la suite a pour limite l.**limite**

NOTATION : Si une suite (u_n) converge vers l, on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$
(on lit : « limite quand n tend vers $+\infty$ de u_n égal l »).

DÉFINITION INTUITIVE : Suite divergente

On dit qu'une suite est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente. Deux cas sont possibles :

- la suite n'a pas de limite ;
- les termes de la suite tendent vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).
  On dit alors que la suite a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$).

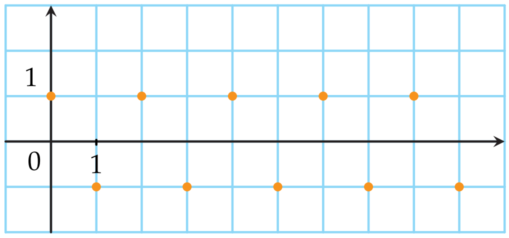
NOTATION : On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

REMARQUE : Des définitions plus complètes seront données en Terminale.

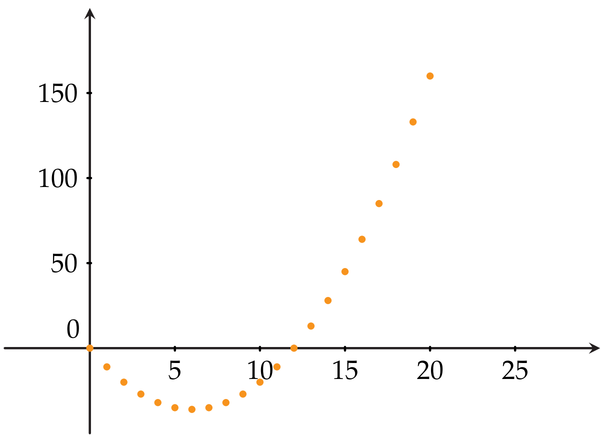
Cours - Méthodes

Exemples

- (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = (-1)^n$.
  Elle est divergente et n'a pas de limite.



- (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = n^2 - 12n$.



Elle est divergente et a pour limite $+\infty$. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

MÉTHODE 5 Conjecturer la limite d'une suite à partir de valeurs

► Ex. 38 p. 144

Sur la table de la calculatrice ou un tableur :
- on regarde les termes de la suite pour des grandes valeurs de n ;
- s'ils semblent tendre vers un nombre l (ou vers $+\infty$ ou $-\infty$), on conjecture que la suite converge vers l (ou diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$).

Exercice d'application

n	u(n)
0	-1
5	.12179
10	.0301
15	.01335
20	.00751
25	.0048
30	.00333

Conjecturer la limite de la suite (u_n) définie pour $n > 1$ par $u_n = \dfrac{1+3n^2}{n^4-1}$.

Correction

Les termes de la suite semblent tendre vers 0.
On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

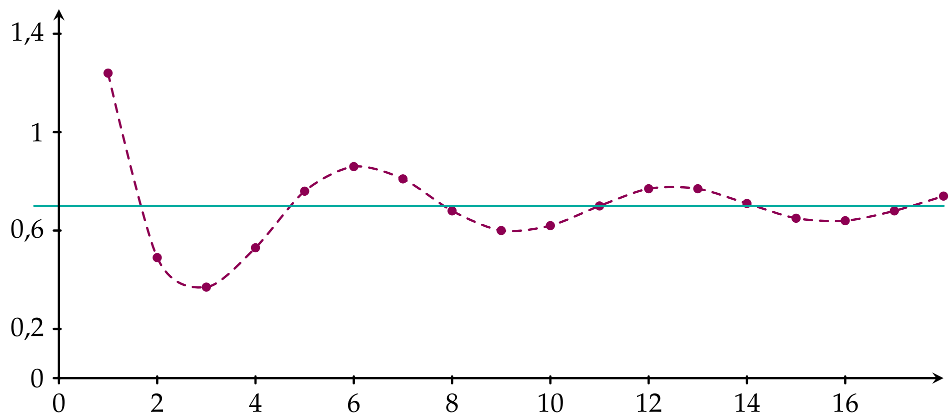
MÉTHODE 6 Lire graphiquement la limite d'une suite

► Ex. 34 p. 142

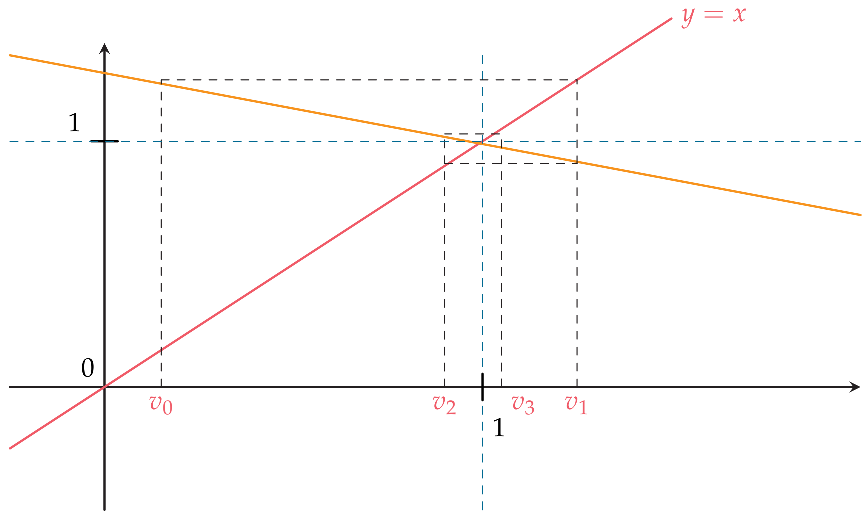
- Si la suite est définie de façon explicite, on observe si les ordonnées semblent se rapprocher d'une valeur quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.
- Si la suite est définie par récurrence, on regarde en abscisse si les termes de la suite se rapprochent de plus en plus d'une valeur quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.

Exercice d'application

1) Lire graphiquement la limite de la suite représentée ci-dessous.



2) Lire graphiquement la limite de la suite représentée ci-dessous.



Correction

1) La suite représentée ci-dessus semble converger vers 0,7.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,7$.

2) La suite représentée ci-dessus semble converger vers 1.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

S'entraîner

Activités mentales

1 Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 4 - 2n$.

2 Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 3n$.

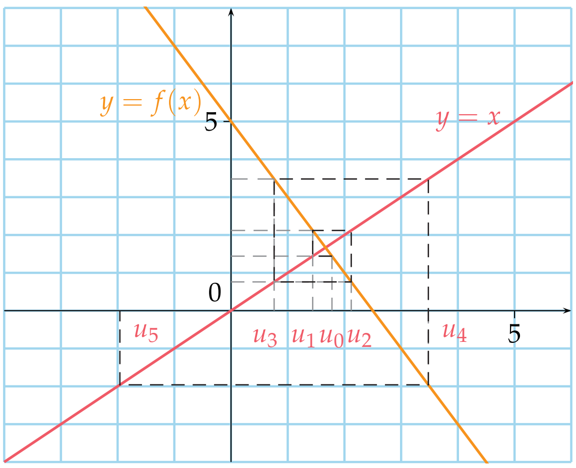
3 Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = (0,2)^n$.

4 Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{1}{n+3}$.

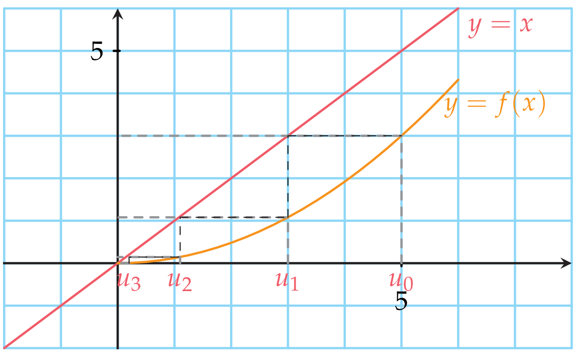
5 Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = (-2)^n$.

6 Dire si chacune des suites suivantes semble monotone.

1)

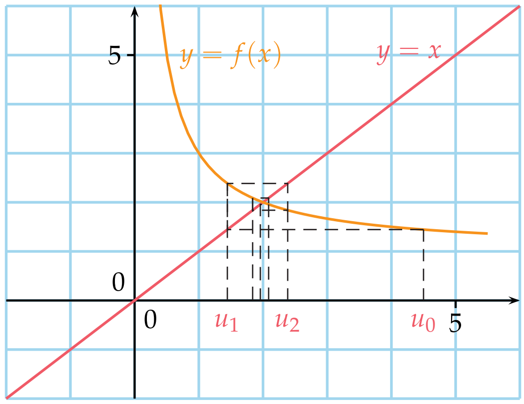


2)

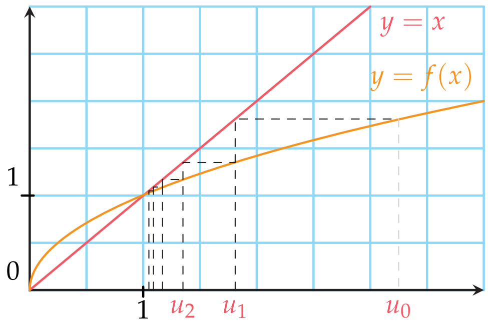


7 Dire si chacune des suites ci-dessous semble convergente ou divergente et conjecturer éventuellement sa limite.

1)



2)



8 INFO

On donne la table de valeurs de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{2}{n} + 4$.

1) Quelle formule a été entrée en B2 ?

2) Dire si la suite semble convergente ou divergente et conjecturer éventuellement sa limite.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	1	2	…	10	100	1 000	1 000 000
2	u_n	6	5	…	4,2	4,02	4,002	4,000002

9 INFO

On donne la table de valeurs de la suite v définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = -2n^2 + 12$.

1) Quelle formule a été entrée en B2 ?

2) Dire si la suite semble convergente ou divergente et conjecturer éventuellement sa limite.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	1	2	…	10	100	1 000	1 000 000
2	v_n	10	4	…	-188	-19988	-2E+006	-2E+012

Sens de variations d'une suite

10 ▶ MÉTHODE 1 p. 135

Étudier la monotonie de la suite u, pour tout entier naturel n, en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1) $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

2) $u_n = 4^n$

3) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$

11 Étudier la monotonie de la suite u, pour tout entier naturel n, en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1) $u_n = n^2 + 2n$

2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3n + u_n \end{cases}$

12 ▶ MÉTHODE 2 p. 135

Étudier la monotonie de la suite v, pour tout entier naturel n, en comparant $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1.

1) $v_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour $n \geq 1$

2) $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3{v_n}^3 + v_n \end{cases}$

3) $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n \end{cases}$

13 Étudier la monotonie de la suite v, pour tout entier naturel n, en comparant $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1.

1) $v_n = \dfrac{5}{8^n}$

2) $v_n = \dfrac{1}{2^n}$

3) $v_n = 2n \times 4^{-n}$ pour n non nul

14 ▶ MÉTHODE 3 p. 136

Étudier la monotonie de la suite u en déterminant une fonction f définie sur un intervalle de type $[a\,;\,+\infty[$ avec $a > 0$ telle que $u_n = f(n)$ dont on étudiera les variations.

1) $u_n = 4n - 7$

2) $u_n = \sqrt{n}$

3) $u_n = n^2 - 4n + 5$

4) $u_n = \dfrac{1}{4n}$

15 Étudier la monotonie de la suite u en déterminant une fonction f définie sur un intervalle de type $[a\,;\,+\infty[$ avec $a > 0$ telle que $u_n = f(n)$ dont on étudiera les variations.

1) $u_n = n^2 - 13n + 36$

2) $u_n = \dfrac{n+2}{3n+2}$

16 ▶ MÉTHODE 4 p. 136

Pour chacun des cas ci-dessous, démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n n'est pas monotone.

1) $u_n = 3n^2 - 3^n$

2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 \end{cases}$

3) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

17 Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par trois méthodes différentes.

1) $u_n = \sqrt{n} + 2$

2) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

3) $u_n = 3n^2 + n$

18 Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $u_n = 3n^2$

2) $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$

3) $u_n = \sqrt{n+1}$

4) $u_n = \dfrac{0,5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

19 Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $u_n = n - n^2$

2) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

3) $u_n = 3n \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

20 Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+2} \end{cases}$

3) $u_n = \dfrac{2^{2n+2}}{3^n}$

S'entraîner

21 Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

2) $u_n + 1 = \dfrac{u_n}{1 + {u_n}^2}$ et $u_0 = 4$

3) $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

22 Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 \times 2 \times ... \times n$.

Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Remarque : $u_n = n!$ et on appelle ce nombre « factorielle n ».

23 INFO

Le plutonium 239 est un élément radioactif.

On sait que la quantité de plutonium 239 diminue de 0,003 % tous les ans.

On s'intéresse à un déchet radioactif contenant 1 g de plutonium 239 l'année $t = 0$ et on note t le nombre d'années écoulées à partir de ce moment.

On note m_t la masse de plutonium 239, exprimée en gramme, présente dans le déchet à l'instant t.

1) Écrire m_{t+1} en fonction de m_t.

2) Étudier la nature de la suite (m_t) puis écrire m_t en fonction de t.

3) Étudier le sens de variations de la suite (m_t).

4) Déterminer, à l'aide d'un tableur, le nombre d'années nécessaires pour diminuer de moitié la masse de plutonium 239 dans ce déchet.

Cette durée s'appelle demi-vie radioactive du plutonium 239.

24 Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et de raison $r = 0,4$.

Étudier la monotonie de (u_n).

25 Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = -2$.

Étudier la monotonie de (u_n).

26 Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = -2$.

Étudier la monotonie de (u_n).

27 Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = \dfrac{1}{4}$.

Étudier la monotonie de (u_n).

28 Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = -5$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

Étudier la monotonie de (v_n).

29 Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{5}$ et de raison $q = 6$.

Étudier la monotonie de (v_n).

30 Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = -\dfrac{1}{5}$.

Étudier la monotonie de (v_n).

31 Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = -\dfrac{1}{2}$ et de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

Étudier la monotonie de (v_n).

32 Soit la suite arithmétique (u_n) de raison r telle que $u_4 = \dfrac{1}{4}$ et $u_5 = \dfrac{1}{6}$.

Étudier la monotonie de (u_n).

33 Soit la suite géométrique (v_n) de raison $q \in \mathbb{R}$ telle que $-1 < q < 0$ et de premier terme $v_1 = 3$.

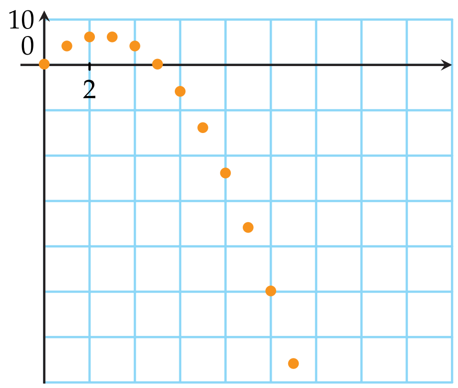
Étudier la monotonie de (v_n).

Convergence d'une suite

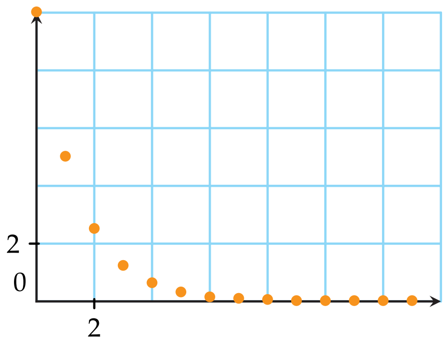
34 ► MÉTHODE 6 p. 139

Par lecture graphique, indiquer si la suite représentée semble monotone et conjecturer son éventuelle limite.

1)

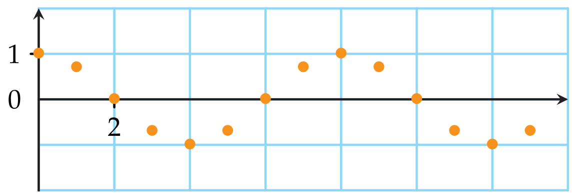


2)

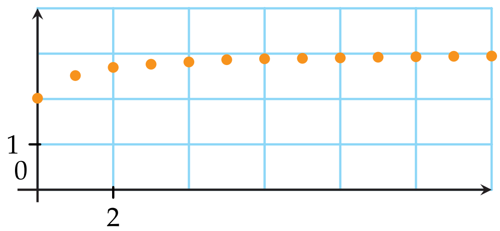


35 Par lecture graphique, indiquer si la suite représentée semble monotone et conjecturer son éventuelle limite.

1)

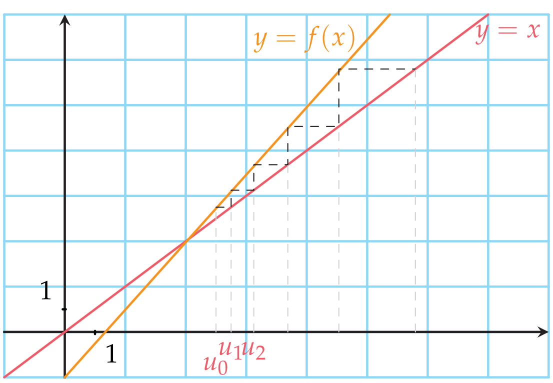


2)

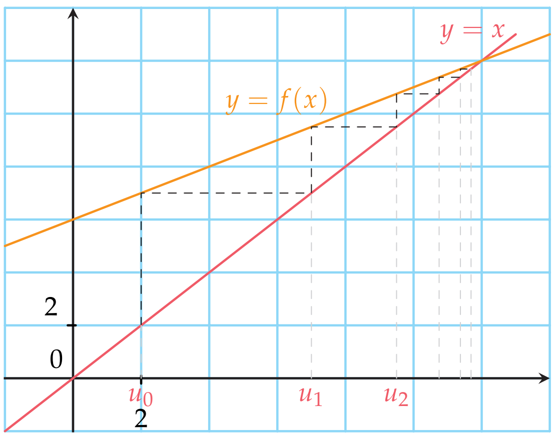


36 Par lecture graphique, indiquer si la suite représentée semble monotone et conjecturer son éventuelle limite.

1)

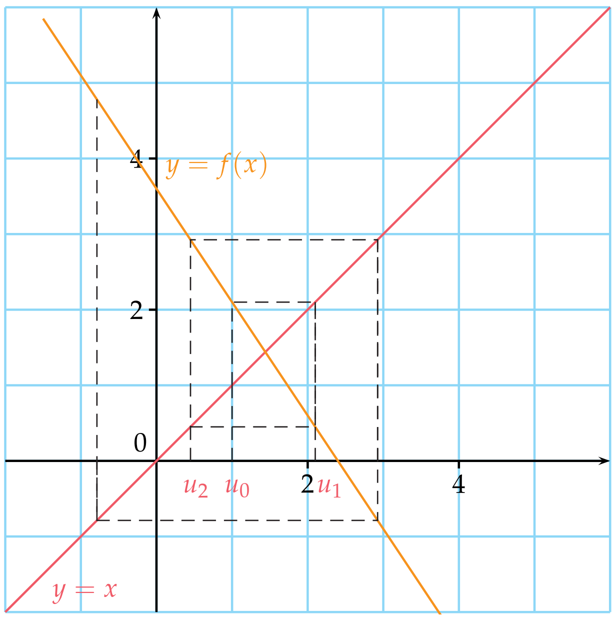


2)

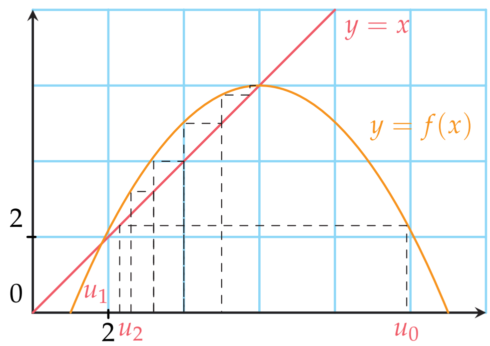


37 Par lecture graphique, indiquer si la suite représentée semble monotone et conjecturer son éventuelle limite.

1)



2)



S'entraîner

38 ▶ MÉTHODE 5 p. 138 CALC

À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u définies sur $\mathbb{N}$ par :

1) $u_n = 2n^2 - 5n - 2$

2) $u_n = -3n^3 + 4n^2 - 1$

39 CALC

À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u.

1) définie pour $n > 1$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$

2) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+4}$

3) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n+1}$

4) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5n+1}{3n-2}$

40 CALC

À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u définie pour $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n$

2) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n$

3) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5}{u_n}$

41 **Limite d'une suite géométrique** CALC

1) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u définie pour $n \in \mathbb{N}$.

a) $u_n = (-4)^n$ **b)** $u_n = 3^n$ **c)** $u_n = 0,6^n$

d) $u_n = (-0,4)^n$ **e)** $u_n = 1^n$ **f)** $u_n = (-1)^n$

2) De façon générale, émettre une conjecture portant sur la limite de (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$ selon les valeurs de q.

42 INFO CALC

On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par $v_n = (-2)^n + 2$.

On souhaite conjecturer la limite de cette suite, et pour cela, on a construit la feuille de tableur ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	1	2	...	10	100	1000
2	u_n	0	6	...	1026	1,268E+030	1,072E+301

1) Quelle est la formule entrée en B2 ?

2) Conjecturer la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

3) À l'aide de la calculatrice, calculer v_{1001}. Cette valeur semble-t-elle cohérente avec la conjecture précédente ?

4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement les termes de la suite v et réfléchir à la convergence de la suite.

43 u est une suite définie pour tout entier naturel n. On considère la suite v définie par $v_n = 3 - u_n$ sur $\mathbb{N}$.

1) On suppose que u est croissante. Étudier les variations de la suite v.

2) On suppose que u converge vers 0. Conjecturer alors la limite de la suite v.

3) On suppose que u a pour limite $+\infty$. Conjecturer alors la limite de la suite v.

44 u est une suite définie pour tout entier naturel n et ne s'annulant pas sur $\mathbb{N}$.

On considère la suite v définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ sur $\mathbb{N}$.

1) On suppose que u est croissante. Étudier les variations de la suite v.

2) On suppose que u converge vers 0. Conjecturer alors la limite de la suite v.

3) On suppose que u a pour limite $+\infty$. Conjecturer alors la limite de la suite v.

Étude complète d'une suite

45 Soient u et v les suites définies pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4v_n}{7} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3v_n}{7} \end{cases}$$

1) Calculer u_0, u_1, v_1, v_2.

2) Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = u_n + v_n$.

Démontrer que (w_n) est constante.

46 Une balle rebondissante est telle que chaque rebond a une hauteur égale à 80 % du rebond précédent.

1) Si on appelle h_n la hauteur en cm du n-ième rebond, montrer que (h_n) est une suite géométrique.

2) Étudier les variations de cette suite.

3) Au bout de combien de rebonds sa hauteur sera-t-elle inférieure au cinquième de sa hauteur initiale ?

47 **Un peu d'écologie**

On jette chaque année 160 kg de déchets dans un bois. On estime que 20 % de la totalité des déchets présents se dégradent.

On note u_n la quantité de déchets présents l'année 2014+n, sachant qu'en 2014 un grand nettoyage du bois a été effectué et que l'on suppose donc que $u_0 = 0$.

1) Montrer que $u_{n+1} = 0,8u_n + 160$ pour tout entier naturel n.

2) Construire les six premiers termes de la suite (u_n) (échelle : 1 cm pour 50 kg sur les deux axes).

3) Conjecturer le sens de variations ainsi que la convergence de la suite.

4) Que peut-on en déduire quant à l'évolution de la quantité de déchets dans ce bois ?

48 On considère la suite (u_n) définie par tout entier naturel n par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 4}{u_n + 9}$.

Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n + 4}{u_n - 1}$.

1) Démontrer que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3) Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4) Étudier les variations de la suite (u_n).

49 CALC

On considère la suite (u_n) définie par tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$.

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que sa limite éventuelle.

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

3) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

4) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

5) Étudier les variations de la suite (u_n).

50 **Concentration d'un réactif en chimie** ALGO

Lors d'une réaction chimique, on étudie l'évolution de la concentration en mol.L^{-1} d'un dérivé chloré.

Pendant 1,5 heures, on a relevé la concentration du dérivé chloré et obtenu le tableau ci-après.

t en min	0	10	20	30	40	50	60
Concentration en mol.L^{-1}	0,500	0,357	0,277	0,227	0,192	0,167	0,147

On souhaite modéliser cette situation de façon à estimer l'évolution de la concentration. On note c_n la concentration du dérivé chloré à l'instant n (en minutes).

L'observation des données relevées conduisent à conjecturer que $c_{n+1} - c_n$ est proportionnel à ${c_n}^2$.

On obtient ainsi $c_0 = 0,5$ et $c_{n+1} = c_n - 0,08{c_n}^2$.

On utilise l'algorithme ci-dessous.

```
Liste des variables utilisées
n : entier naturel
c et A : réels
Entrées
Affecter à n la valeur 0
Affecter à c la valeur 0,5
Demander A
Traitements
Tant que c ≥ A faire
    Affecter à c la valeur c - 0,08 c²
    Affecter à n la valeur n + 1
Fin tant que
Affichage
Afficher n
```

1) Quelle valeur est affichée en sortie pour A = 0,2 ? Pour A = 0,1 ?

2) Expliquer le rôle de cet algorithme.

51 **Filtre lumineux**

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse.

On superpose n plaques de verre identiques et on note i_n l'intensité du rayon à la sortie de la n-ème plaque exprimée en candela.

1) i_0 étant l'intensité lumineuse du rayon avant son entrée dans la première plaque de verre et i_1 l'intensité à la sortie de cette plaque de verre, exprimer i_1 en fonction de i_0.

2) Étude de la suite (i_n)

a) Quelle est la nature de la suite (i_n) ?

b) Exprimer i_n en fonction de n et de i_0.

c) Étudier les variations de la suite (i_n).

3) Déterminer l'intensité initiale d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques teintées est égale à 15 candelas.

4) Combien faut-il au minimum qu'un rayon traverse de plaques pour que son intensité lumineuse soit divisée par 5 ?

52 **Disparition de la pie bavarde** ALGO CALC

La pie bavarde est une espèce existant en Alsace. On comptait 270 pies dans une réserve naturelle en 2001. Une étude a révélé que la population de pies diminuait de 10 % chaque année.

On notera dans la suite de l'exercice p_n le nombre de pie l'année $2001 + n$.

1) a) Déterminer la nature de la suite (p_n).
   b) Écrire p_n en fonction de n.
   c) Dresser une table de valeurs de la suite (p_n) sur la calculatrice.

2) En 2010, il y avait 105 pies dans la réserve. Cette donnée est-elle cohérente avec le modèle proposé ?

3) On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Liste des variables utilisées
n : entier naturel
p : réel
Entrées
Affecter à n la valeur 0
Affecter à p la valeur 270
Traitements
Tant que p ≥ 1 faire
   Affecter à p la valeur 0,9p
   Affecter à n la valeur n + 1
Fin tant que
Affichage
Afficher 2001 + n
```

   a) Expliquer le rôle de l'algorithme.
   b) Quelle valeur est obtenue en sortie ?
   c) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

53

1) Démontrer qu'une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 1$ est croissante.

2) Démontrer qu'une suite géométrique de premier terme $u_0 < 0$ et de raison $0 < q < 1$ est croissante.

3) Démontrer qu'une suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et de raison $q < 0$ n'est pas monotone.

54 ALGO CALC

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{3}{2}$.

1) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il calcule et affiche les 10 premiers termes de la suite (u_n).

```
Liste des variables utilisées
n est un entier naturel
u est un réel
Entrées
Affecter à u la valeur ...
Affecter à n la valeur ...
Traitements
Afficher la variable u
Pour n allant de ... à ...
Affecter à u la valeur ...
Afficher la variable u
Fin tant que
```

2) En utilisant cet algorithme ou la calculatrice, conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) et son éventuelle limite.

3) Peut-on étudier les variations de la suite (u_n) à l'aide de la formule de récurrence ?

4) Démonstration des variations à l'aide d'une suite auxiliaire
   On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $v_n = u_n - 3$.
   a) Calculer à la main v_0 et v_1.
   b) Déterminer la nature de la suite (v_n).
   c) En déduire la formule explicite de v_n puis celle de u_n.
   d) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

55 On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n+2}$.

1) a) Déterminer l'expression de w_n pour les entiers naturels n pairs.

b) Déterminer l'expression de w_n pour les entiers naturels n impairs, puis simplifier l'expression.

2) Soient (p_n) et (i_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par $p_n = w_{2n}$ et $i_n = w_{2n+1}$.

a) Donner l'expression de p_n en fonctionde n. Que remarque-t-on ?

b) Exprimer i_n et i_{n+1} en fonction de n. En déduire que la suite (i_n) est croissante.

3) Que peut-on dire sur la monotonie de (w_n) ?

56 **Vers le BAC** ALGO CALC

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par son premier terme $u_1 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)u_n + n - 1}{2n}$.

Partie A : Algorithme et conjecture

1) Écrire un algorithme permettant de calculer et d'afficher les 20 premiers termes de la suite (u_n).

2) À l'aide de cet algorithme ou de la table de valeurs de la calculatrice, conjecturer le sens de variations et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Suite auxiliaire

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{n}$.

1) Montrer que (v_n) est géométrique.

2) Écrire v_n en fonction de n.

3) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1.$$

4) Justifier que pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-n).$$

En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

57 **Conjecturer pour démontrer** ALGO INFO

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 6n + 5$.

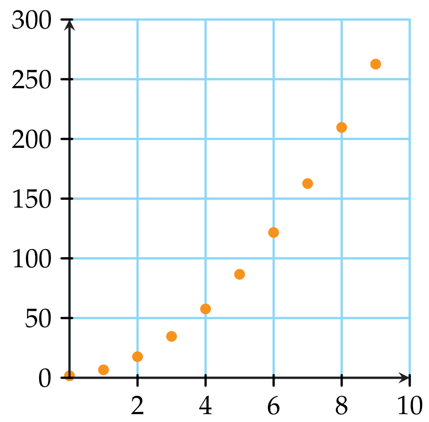
1) Compléter l'algorithme suivant permettant de calculer les n premiers termes de la suite où n est fixé par l'utilisateur.

```
Liste des variables utilisées
n : entier naturel
u : réel
Entrées
Entrer n
Affecter à u la valeur 1
Traitements
Pour i allant de 1 à ... faire
    Affecter à u la valeur ...
    Afficher u
Fin Pour
```

À l'aide de cet algorithme, on obtient la table de valeurs suivante.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	1	6	17	34	57	86	121	162	209	262

2) On a représenté graphiquement les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ pour n allant de 0 à 9 ci-dessous.



a) Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) puis démontrer cette conjecture.

b) L'allure parabolique de cette représentation graphique permet de conjecturer que la forme explicite de la suite (u_n) s'écrit :

$$u_n = an^2 + bn + c$$

où a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$.

En utilisant les valeurs de u_0, u_1 et u_2 fournies par la table de valeurs, déterminer les valeurs de a, b et c.

3) Étude d'une suite auxiliaire

Soit (d_n)la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Démontrer que la suite (d_n) est arithmétique.

b) Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} d_n = d_0 + d_1 + ... + d_n$.

c) En remarquant que :

$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + ... + (u_{n+1} - u_n)$

et en simplifiant cette expression, déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de n.

d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

58 Achille et la tortue ou le paradoxe de Zénon

INFO

Le philosophe grec Zénon raconte qu'un jour, le héros grec Achille a disputé une course contre une tortue.

Achille avait accordé 100 mètres d'avance à la tortue réputée très lente.

Zénon énonça qu'Achille ne peut rattraper la tortue car, pendant qu'Achille court jusqu'au point où a démarré la tortue, l'animal avance, de telle sorte qu'Achille ne peut jamais la rattraper.

1) Intuitivement, le fait qu'Achille ne rattrape jamais la tortue vous paraît-il correct ?

2) En modélisant la situation, nous allons justifier que le raisonnement précédent est faux.

Pour cela, nous allons considérer qu'Achille courait à 10 m.s^{-1} (proche du record du monde actuel) et la tortue à 0,1 m.s^{-1}.

On notera d_0 l'avance de la tortue, d_1 la distance parcourue par la tortue pendant qu'Achille parcourt la distance d_0, d_2 la distance parcourue par la tortue pendant qu'Achille parcourt la distance d_1 et de manière générale, d_n la distance parcourue par la tortue pendant qu'Achille parcourt d_{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On notera t_n le temps nécessaire à Achille pour parcourir la distance d_n.

a) Déterminer t_0 puis d_1, t_1 et d_2.

b) Justifier que pour tout entier naturel n :

$t_{n+1} = \frac{1}{100} t_n$.

c) En déduire la nature de la suite (t_n) et l'expression de t_n en fonction de n.

d) Exprimer alors $\sum_{k=0}^{n} t_k = t_0 + t_1 + ... + t_n$ en fonction de n.

e) Selon Zénon, il faut une infinité d'étapes pour rattraper la tortue. À l'aide de la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel ci-dessous, montrer que Zénon se trompe.

```
1 limit((1000/99)*(1-(1/100)^n),n,+infinity)
```

$\frac{1000}{99}$

> La situation décrite par Zénon apparaît comme un paradoxe si l'on croit que la somme d'une infinité de nombres positifs est infinie. Mais ce n'est pas le cas, comme on vient de le voir !

59 Gestion de stock dans une bibliothèque

ALGO

On reprend la situation de l'activité 1 page 132.

Début 2014, une bibliothèque dispose de 30 000 ouvrages. Elle change de locaux et va dorénavant pouvoir stocker jusqu'à 100 000 ouvrages. Chaque année, la commune achète 3 000 nouveaux livres à la bibliothèque. Les bibliothécaires décident de se débarrasser chaque année de 5 % des ouvrages, trop abîmés.

Écrire un algorithme déterminant en quelle année le stock aura dépassé les 100 000 ouvrages.

60 La « hauteur » d'un son est liée à sa fréquence. Plus celle-ci est élevée, plus le son est aigu. Lorsque l'on multiplie la fréquence d'une note de musique par 2, on obtient une note portant le même nom séparé par un intervalle sonore appelé octave. Chaque octave comporte les notes *do*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la* et *si*.

Le violoncelle possède des cordes de longueur $L = 70$ cm. Le joueur a la possibilité de réduire la longueur de la corde en appuyant sur le manche de l'instrument. La gamme de fréquences d'un violoncelle va approximativement de 65 Hz à 1 000 Hz.

Sachant que le do, correspondant à une des cordes à vide, a une fréquence de 65,4 Hz, quelles sont les fréquences des différents do audibles sur cette corde ?

61 On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 4n + 3. \end{cases}$$

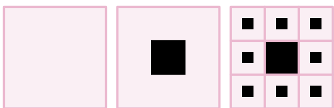
1) Démontrer que la suite u est strictement croissante.

2) On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3) Écrire un algorithme déterminant, pour un réel A, à partir de quelle valeur de n on a $u_n \geq A$.

62 **Tapis de Sierpinski** INFO ALGO

On décompose un carré de 81 cm de côté en 9 carrés comme ci-dessous dans la figure 1. On noircit le carré central. Puis les 8 carrés restants sont divisés en 9 carrés. Dans ces 8 carrés, on noircit le carré central et ainsi de suite. . .



Étape 0 Étape 1 Étape 2

PARTIE A : Aire non noircie

Soit (A_n) l'aire non noircie du carré à l'ordre n.

1) Calculer A_0, A_1, A_2.

2) Trouver une relation liant A_{n+1} et A_n pour tout entier n.

3) À l'aide d'un tableur ou d'un algorithme, conjecturer la limite de la suite (A_n).

4) Que peut-on en déduire ?

PARTIE B : Périmètre de la surface non noircie

Soit (P_n) la somme des périmètres de tous les carrés à l'ordre n (blancs et noirs)

1) Calculer P_0, P_1, P_2.

2) Trouver une relation liant P_{n+1} et P_n pour tout entier naturel n.

3) À l'aide d'un tableur ou d'un algorithme, conjecturer la limite de la suite (P_n).

4) Que peut-on en déduire ?

63 CALC

Une ligne de transmission est un ensemble de nombreuses cellules conductrices (n) acheminant un signal électrique d'une source (émetteur) vers une charge (récepteur).

On s'intéresse à la valeur efficace de la tension à l'entrée de la n-ième cellule, notée u_n sachant qu'à la source, la valeur de la tension efficace est $u_0 = 10$ V, et que le passage dans une cellule multiplie la valeur efficace de la tension par 0,95 (cette valeur est appelée transmittance).

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, puis en fonction de n.

2) À l'aide de la table de la calculatrice, conjecturer la valeur de la tension efficace lorsque le nombre de cellules tend vers l'infini.

3) On réalise à l'aide d'un circuit sommateur, un circuit dont la tension en sortie est la somme des valeurs successives de u_k pour k variant de 1 à n, notée S_n.

  a) Exprimer S_n en fonction de n.

  b) À l'aide de la table de la calculatrice, conjecturer la valeur de la tension en sortie avec le circuit sommateur lorsque le nombre de cellules tend vers l'infini.

64 ALGO

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) Calculer à la main les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) n étant un entier naturel non nul, écrire un algorithme qui calcule les n premiers termes de la suite (u_n).

4) Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n).

5) Écrire un algorithme permettant de déterminer un seuil N (entier naturel non nul) tel que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \geq 10^3$.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Étudier
- la monotonie d'une suite
- une suite à l'aide d'une suite auxiliaire

Déterminer
- le sens de variations d'une suite arithmétique ou géométrique

Conjecturer
- la limite d'une suite à l'aide d'une table de valeurs ou d'une représentation graphique

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

65 La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{2n-3}{n+4}$ est :

ⓐ croissante ⓑ décroissante ⓒ non monotone

66 La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n \end{cases}$ est :

ⓐ croissante ⓑ décroissante ⓒ non monotone

67 La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{3}{n} - 1$ est :

ⓐ croissante ⓑ décroissante ⓒ non monotone

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 - 2n$.

68 La suite (u_n) est une suite :

ⓐ arithmétique ⓑ géométrique ⓒ ni arithmétique ni géométrique

69 La suite (u_n) est une suite :

ⓐ croissante ⓑ décroissante ⓒ non monotone

70 Quelle semble être la limite de cette suite ?

ⓐ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ⓑ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ⓒ (u_n) n'a pas de limite

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 3 + 2^n$.

71 La suite (v_n) est une suite :

(a) arithmétique (b) géométrique (c) ni arithmétique ni géométrique

72 La suite (v_n) est une suite :

(a) croissante (b) décroissante (c) non monotone

73 La feuille de tableur ci-dessous calcule des termes de la suite(v_n).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	0	1	2	…	10	100	1000
2	u_n	4	5	7	…	1027	1,268E+030	1,072E+301

Quelle formule a-t-on entré en C2 ?

(a) $= 3 + 2\hat{}C1$ (b) $= 3 + 2\hat{}B2$ (c) $= 3 + 2 * C1$ (d) $= 3 + 2 * B2$

74 À l'aide de la feuille de tableur ci-dessus, on conjecture que :

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$ (b) (v_n) n'a pas de limite (c) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$ (d) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 4$ et $w_{n+1} = -2w_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

75 La suite (w_n) est une suite :

(a) arithmétique (b) géométrique (c) ni arithmétique ni géométrique

76 La suite (w_n) est une suite :

(a) croissante (b) décroissante (c) non monotone

77 Soit (t_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = w_n - 1$. (t_n) est une suite :

(a) arithmétique de raison –1 (c) arithmétique de raison 3

(b) géométrique de raison -1 (d) géométrique de raison -2

78 L'expression de w_n en fonction de n est :

(a) $w_n = 3n + 4$ (b) $w_n = 3(-2)^n - 1$ (c) $w_n = 3(-2)^n + 1$ (d) $w_n = 3(-1)^n + 1$

79 On considère une suite u définie sur $\mathbb{N}$, strictement positive et décroissante. Alors :

(a) la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -3u_n$ est croissante

(b) la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (u_n)^2$ est croissante

(c) la suite t définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = \dfrac{1}{u_n}$ est croissante

TP 1 Vitesse de convergence

INFO

On considère les suites t, u, v et w définies pour tout entier naturel non nul par :

$t_n = \dfrac{1}{n}$; $u_n = \dfrac{1}{n^2}$; $v_n = (0,7)^n$ et $w_n = (0,4)^n$.

1) Dresser un tableau de valeurs de chacune de ces suites à l'aide d'un tableur et conjecturer leur limite.

2) Étudier les variations de chacune de ces suites.

3) On admet dans la suite de l'exercice que ces quatre suites convergent vers 0.
Réaliser sur le modèle ci-dessous une feuille de calcul indiquant à partir de quel indice n_0 les termes de ces suites sont inférieurs à un seuil fixé.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	seuil	0,50							
2									
3									
4	n	1/n	seuil atteint	1/n²	seuil atteint	(0,7)^n	seuil atteint	(0,3)^n	seuil atteint
5			oui/non		oui/non		oui/non		oui/non
6	1	1	non	1	non	0,7	non	0,3000000000000	oui
7	2	0,5	non	0,25	oui	0,49	oui	0,0900000000000	oui
8	3	0,33	oui	0,11	oui	0,34	oui	0,0270000000000	oui

4) Recopier le tableau ci-dessous et le remplir à l'aide de la feuille de calcul.

Seuil	t	u	v	w
0,1				
0,01				
0,001				
0,0001				

5) Interpréter les résultats précédents en comparant les quatre suites étudiées.

TP 2 Évolution d'une population

INFO

Le modèle de Verhulst est un modèle de croissance proposé par Pierre François Verhulst vers 1840. On s'intéresse à l'effectif d'une population d'insectes. L'effectif de la population, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par le nombre u_n.

On s'intéresse à une population qui reste inférieure à un million.

On admet que l'évolution de la population d'une année sur l'autre est donnée par le modèle de Verhultz suivant :

$u_{n+1} = (a+1)u_n\,(1-u_n)$, avec $a+1$ le taux de reproduction.

On cherche à savoir comment se comporte la suite en fonction des valeurs de a.

1) Pour chacun des cas suivants, sur un tableur, faire apparaître les 30 premiers termes de la suite et tracer sa représentation graphique.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	TAUX de REPRODUCTION																	
2																		
3																		
4	ANNEE		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	POPULATION en million d'individus																	
6																		
7																		

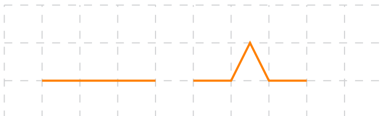
a) $a = 0$ et $u_0 = 0,5$
b) $a = 0,9$ et $u_0 = 0,1$
c) $a = 2,5$ et $u_0 = 0,3$

2) Décrire l'évolution de la population dans chacun des cas.

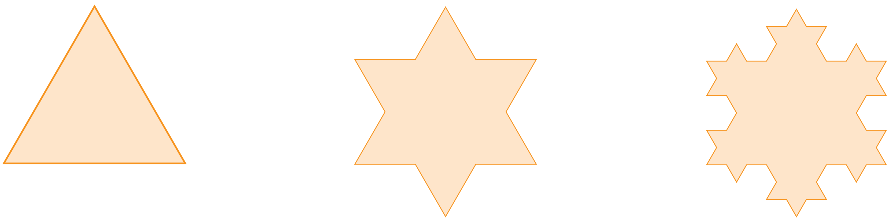
TP 3 Le flocon de Koch

INFO

Étape 0 : On considère un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 1 unité.
Étape 1 : On divise chaque segment en 4 segments de **même longueur** formant une ligne brisée.



Étapes suivantes : On recommence ce procédé en divisant chaque segment par quatre segments de même longueur formant une ligne brisée.
À chaque étape, on obtient un polygone dont on va étudier l'aire et le périmètre.



1 Étude du périmètre de la figure

On appelle p_n le périmètre du polygone à l'étape n.

1) Déterminer p_0, p_1 et p_2.
2) Montrer que $p_{n+1} = \frac{4}{3}p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) En déduire la nature de la suite (p_n) et l'expression de p_n en fonction de n.
4) Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

1	Limite $(3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$, n, +infini)
	+ infini

Traduire ce résultat dans le cadre du problème traité.

Travaux pratiques

2 Étude de l'aire de la figure

On appelle a_n l'aire du polygone à l'étape n.

1) Déterminer a_0, a_1 et a_2.

2) Montrer que $a_{n+1} = a_n + \dfrac{\sqrt{3}}{4 \times 3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	a(n+1)=a(n)+ $\dfrac{\sqrt{3}}{4 \times 3^n}$, a(0)= $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
	a(n)= $\dfrac{5\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$
2	Limite($\dfrac{5\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, n, +infini)
	$\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$

Traduire ces résultats dans le cadre du problème traité.

Helge Von Koch, mathématicien suédois du XX^e siècle, a ainsi exposé à la communauté scientifique pour la première fois, un polygone dont le périmètre peut être aussi grand que l'on veut, mais dont l'aire tend vers $\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$ en restant toujours inférieure à cette valeur.

Récréation, énigmes

Le flocon de Koch (étudié dans le TP3) est un exemple de fractale.

1) Rechercher la définition du mot fractale.

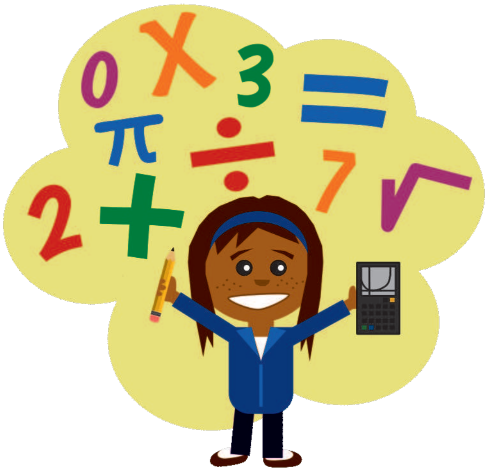
2) Des formes fractales sont observables dans la nature, en art et en mathématiques…
En donner différents exemples.

TRAVAILLER AUTREMENT

Ce chapitre regroupe un ensemble d'activités pouvant être abordées à des moments variés de l'année.
Elles utilisent des notions de différents chapitres et permettent de travailler autrement pour développer les compétences transversales :

- rechercher, extraire et organiser l'information utile ;
- réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes ;
- raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale, démontrer ;
- présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté.

SE DÉPASSER ET FRANCHIR DES SOMMETS



Problèmes ouverts

Les **problèmes ouverts** se définissent comme des « *énoncés courts qui n'induisent ni la méthode, ni la solution* ».
Il est possible de s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.
La **narration de recherche**, trace écrite des démarches engagées pour résoudre le problème, permet de s'initier et de développer une démarche scientifique.

Problèmes de synthèse

Les **problèmes de synthèse** font appel à des notions de différents chapitres avec des questions qui s'enchaînent. Ils permettent de réactiver un ensemble de connaissances et établir des liens entre les chapitres tout en étant guidé.

QCM de synthèse

Les **Questionnaires à Choix Multiples** permettent de vérifier l'acquisition des raisonnements en s'affranchissant de la rédaction. Trois sont proposés sur chaque partie du programme.
Un outil permettant de créer des QCM très facilement est disponible sur le logiciel gratuit Labomep (*www.labomep.net*).
Interactif, il propose solutions, éléments de correction et des exercices en remédiation.

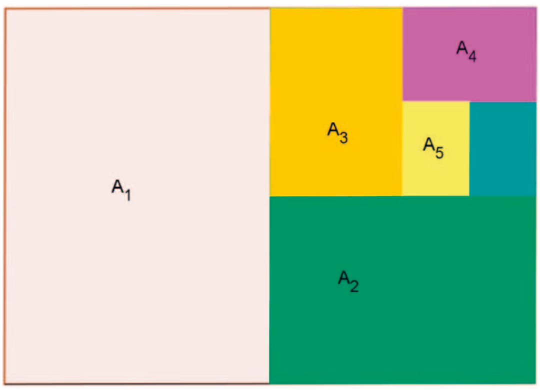
PROBLÈMES OUVERTS

1 Marion et Théo vont jouer à 4 parties de backgammon. Ils sont de force égale et on rappelle qu'au backgammon, il n'y a pas de partie nulle. La probabilité que chacun gagne la moitié des parties est égale $\frac{3}{8}$. Quelle est la probabilité que Marion gagne plus de parties que Théo ?

2 Combien de fois doit-on lancer un dé équilibré, pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre 6 soit supérieure à 0,99 ?

3 **Formats de papier**

Le format de papier A0 correspond à un rectangle de largeur de 84,1 cm et une longueur de 118,9 cm.



Le format A1 est obtenu en coupant en deux parties égales le format A0, il a donc pour longueur la largeur de A0 et pour largeur la moitié de la longueur de A0. Sur le même principe une feuille A1 contient deux feuilles A2, une feuille A2 deux feuilles A3, etc.

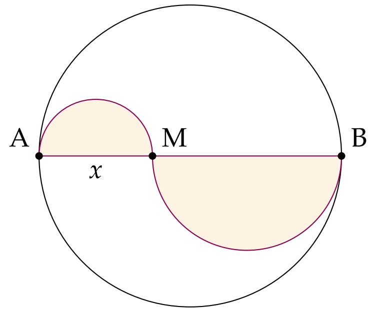
Déterminer les dimensions d'une feuille de format A6.

4 On souhaite enrouler un câble de 100 m autour d'un cylindre de rayon 50 cm. On considère que le câble est suffisamment fin pour négliger son épaisseur.

Combien faudra-t-il faire de tours pour enrouler tout le câble ?

5 On considère un cercle de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 8$ cm. M est un point quelconque sur le segment $[AB]$. On pose $x = AM$.

On a construit de part et d'autre de $[AB]$ des demi-cercles de diamètres $[AM]$ et $[MB]$.



Déterminer x pour que l'aire coloriée soit minimale.

6 **C'est la tuile !**

Pour couvrir un toit conique, un couvreur dispose des tuiles en rangs successifs, en partant du bas. Le premier rang comporte 215 ardoises, et chaque rang nécessite 6 ardoises de moins que le rang précédent. Sachant que le dernier rang compte 11 ardoises, calculer le nombre d'ardoises nécessaires pour couvrir le toit.

7 **Le poids du plat**

Le poids diminue avec l'altitude. Un astronaute emmène des plats lyophilisés dont « Riz au petit légumes » de masse 150 g (sur Terre). Son poids P (en N) à l'altitude a (en km) au-dessus du niveau de la mer est donné par :

$$P = 0,15 \times 9,8 \times \left(\frac{6400}{6400 + a}\right)^2.$$

À quelle altitude le plat lyophilisé pèsera-t-il moins de 0,5 N ?

8 Soit n un entier naturel et P une fonction polynôme de degré n, c'est-à-dire une fonction pouvant s'écrire sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ avec } a_n \neq 0$$

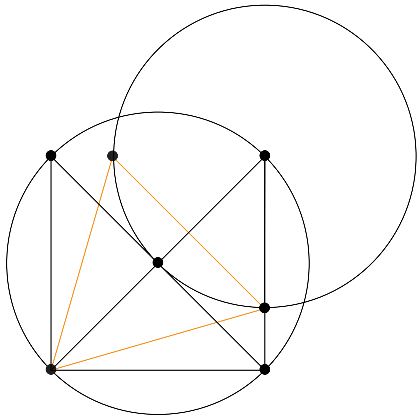
On suppose qu'il existe un réel c tel que $P(c) > 0$ et, pour tout entier $k \geq 1$, $P^{(k)}(c) \geq 0$. Démontrer que P ne s'annule pas dans l'intervalle $[c; +\infty[$.

9 Résoudre l'équation $\cos^n x - \sin^n x = 1$, n étant un entier naturel non nul.

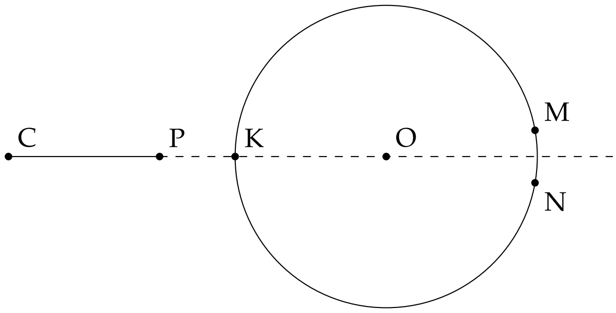
D'après Olympiades internationales 1961

10 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et A le point de coordonnées $(2; 2)$. Quels sont les points de $\mathcal{P}$ visibles depuis A ?

11 Justifier la construction ci-contre, à la règle et au compas, d'un triangle équilatéral inscrit dans un carré.



12 En sortant de son phare, le gardien a laissé la porte ouverte, mais il a laissé son chien C attaché à un piquet P situé à 2 m du pied K du phare avec une chaîne PC de 10 m, à l'opposé de la porte dont l'ouverture MN mesure 1 m de large. Le rayon de la base circulaire du phare est 3 m.
Je connais bien le gardien mais malheureusement le chien ne me connaît pas.
Vais je pouvoir entrer pour attendre mon ami ?



D'après les Olympiades académiques

13 Parmi tous les triangles rectangles d'hypoténuse 1, en existe-t-il au moins un qui ait un périmètre plus grand que tous les autres ? Si oui, déterminer ses dimensions.

14 Peut-on trouver une série de nombres positifs dont :

1) la médiane est strictement inférieure à la moitié de la moyenne ?
2) la moyenne est strictement inférieure à la moitié de la médiane ?

15 Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

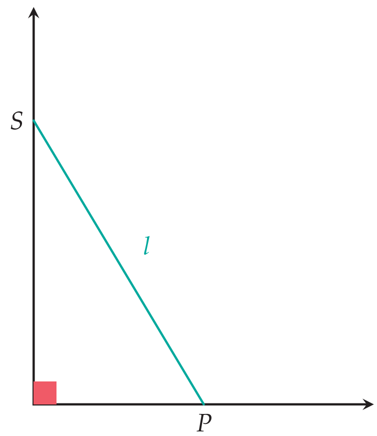
$$f(x) = |x^3 + 2x^2 - x - 2|$$

16 Un objet se déplace sur un axe horizontal.

Sa position par rapport à l'origine à l'instant t est donnée par $x(t) = \sqrt{t}$.

1) Sa vitesse augment-t-elle ou diminue-t-elle avec le temps ?
2) Entre les instants 10 et 11, quelle est l'évolution, en pourcentage, de la vitesse ?

17 Le sommet S d'une échelle de longueur l glisse le long d'un mur vertical qui repose sur un sol horizontal. La vitesse du sommet de l'échelle est donnée par $v_S(t)$. Quelle est la vitesse $v_P(t)$ du pied P de l'échelle ?



18 a et b sont deux entiers tels que $a \in [-5;5]$ et $b \in [-5;5]$.

Trouver toutes les valeurs possibles de a et b tels que la droite d d'équation $ax + by + 5 = 0$ passe par $A(3;2)$.

19 Où se trouvent les centres des cercles de rayon 1 qui sont tangents au cercle unité (deux cercles sont tangents en un point si ils ont la même tangente en ce point) ?

20 Dans un repère du plan, on considère les points $A(1;-2)$, $B(x;6)$ et $C(0;y)$ où x et y sont des nombres réels.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x et de y les points A, B et C sont alignés.

21 Francis, qui est né le 1er février 1998, a vu la publicité suivante : « Envoie ta date de naissance (JJ/MM/AAAA) et celle de ta copine ou ton copain par SMS au 12345 et nous calculerons votre pourcentage de compatibilité ».
Ce qu'il ne sait pas, c'est que l'algorithme calculant ce pourcentage :

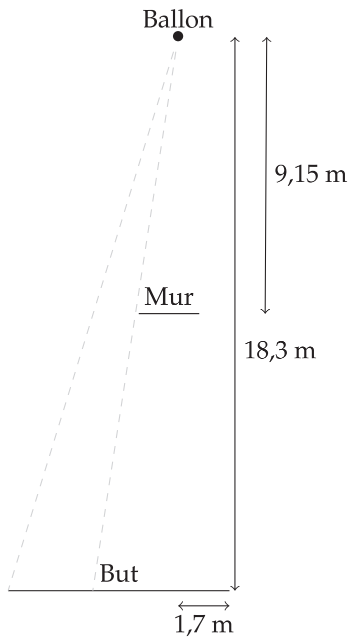
- ajoute tous les chiffres de la 1re date de naissance, cela donne un nombre d_1 ;
- ajoute tous les chiffres de la 2e date de naissance, cela donne un nombre d_2 ;
- calcule $100 \times \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u}(\cos(d_1°)\ ;\ \sin(d_1°))$ et $\overrightarrow{v}(\cos(d_2°)\ ;\ \sin(d_2°))$.

Donner les dates de naissances assurant une compatibilité de plus de 99,9 % avec Francis sachant qu'il recherche quelqu'un né la même année que lui.

22 Lors d'un match de football, l'arbitre siffle un coup franc et la situation est la suivante :

- le coup franc est tiré à 18,3 m du but et le ballon est décalé de 1,7 m par rapport au poteau droit ;
- le mur (mesurant 2,5 m de large et parallèle au but) se situe à 9,15 m du ballon et son extrémité droite est alignée avec le ballon et le poteau droit du but ;
- un but mesure 7,32 m de large.

Déterminer l'angle dont dispose le tireur s'il veut tirer entre l'extrémité gauche du mur et le poteau gauche du but.



23 Sur le bulletin scolaire du premier trimestre, le professeur de mathématiques d'Audrey a écrit qu'elle devait « gagner en constance dans les résultats ».
Audrey lui a demandé ce que cela voulait dire, il lui a répondu : « l'écart-type de tes notes doit être inférieur à 2 ».
Sachant qu'Audrey a pour l'instant eu 12, 14 et 14, quelle peut être sa dernière note du trimestre pour « être constante » ?

24 Gregor M. souhaite étayer sa théorie concernant les lois de la génétique et la transmission de caractères. En croisant des plants de pois lisses avec des plants de pois ridés, il obtient 5 740 plants. Selon son modèle, il s'attend à trouver dans la nouvelle génération une proportion de $0,75$ de pois lisses.
Il publie ses résultats : il a trouvé 178 plants de pois lisses parmi les 5 740 plants, et crie victoire.
Jean-Baptiste L., biologiste concurrent, s'exclame : « c'est impossible, c'est trop beau pour être vrai ! ».
En supposant que le nombre de pois lisses suive une loi binomiale de paramètres $n = 5\,740$ et $p = 0,75$, commenter l'affirmation de Jean-Baptiste en vous aidant d'un intervalle de fluctuation judicieusement choisi.

25 Lorsqu'une personne achète un billet d'avion, la probabilité qu'elle ne prenne pas le vol est de 5 %.
Constatant cela, une compagnie aérienne a décidé de vendre plus de places que de disponibles pour ses avions qui peuvent contenir jusqu'à 150 passagers, pratique courante appelée surbooking.
Quel nombre de places peut-elle vendre si elle souhaite que le risque qu'il n'y ait pas assez de places dans l'avion soit inférieur à 5 % ?

26 Un marchand de chaussures pense que le nombre de visiteurs quotidiens dans son magasin suit une loi binomiale de paramètres n et p. Il souhaite déterminer une estimation de n et de p.
En épluchant son registre, il a noté les faits suivants :

- en moyenne, 18 visiteurs passent dans son magasin chaque jour ;
- la probabilité que strictement moins de 20 visiteurs entrent dans son magasin durant une journée est d'environ $0,74$.

Déterminer les valeurs de n et de p.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

27 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 1}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1) a) Déterminer le réel a tel que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = x + \dfrac{a}{x-1}$.
   b) En déduire la position de C_f par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
2) Soit m un réel tel que $m \neq 1$. Pour chaque valeur de m, on considère la droite D_m d'équation $y = mx$.
   a) Montrer que chercher les points communs à la courbe C_f et à la droite D_m revient à résoudre l'équation du second degré :
   $(E_m)\ (1-m)x^2 + (m-1)x - 1 = 0$.
   b) Discuter le nombre de solutions de l'équation (E_m) selon les valeurs de m. En donner une interprétation graphique.
3) Vérifier les résultats obtenus à l'aide d'un logiciel.

28 Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules bleues et n boules vertes (où n est un entier naturel non nul). Les boules sont indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne. On note X le nombre de couleurs apparues.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Montrer que $E(X) = \dfrac{n^2 + 28n + 73}{(n+7)^2}$
3) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 28x + 73}{(x+7)^2}$.
4) En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance $E(X)$ est maximale.

29 On lance deux dés bien équilibrés et on note la somme des chiffres obtenus sur la face supérieure des deux dés. On répète cette expérience n fois de suite.

1) Quelle est la probabilité de ne pas obtenir la somme 12 une seule fois lors des n lancers ?
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n cette probabilité.
   a) Étudier la nature de la suite (p_n).
   b) Étudier le sens de variations de la suite (p_n).
   c) À l'aide d'une table de valeurs de (p_n), conjecturer la limite de la suite.
   d) À l'aide d'une table de valeurs de (p_n), déterminer le plus petit entier naturel k à partir duquel $p_k < 0,01$ et interpréter ce résultat.

30 **Le nombre d'or**

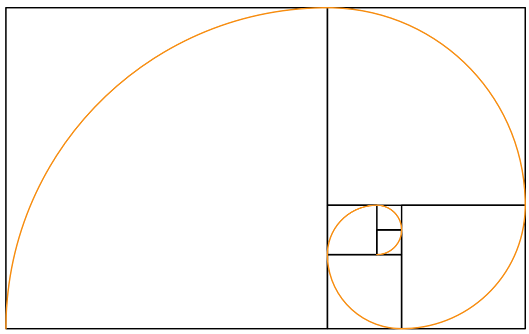
PARTIE A : La suite de Fibonacci et le nombre d'or

Ses deux premiers termes sont 1 et 1, puis chaque terme et la somme des deux termes qui le précèdent.
En notant u_n le terme d'indice n de la suite, on a $u_0 = 1$; $u_1 = 1\ldots$

1) Donner les valeurs des cinq termes suivants.
2) Donner la relation de récurrence permettant de calculer un terme en fonction des deux termes qui le précèdent.
3) Cette suite est-elle arithmétique ? géométrique ?
4) À l'aide d'un algorithme programmé sur calculatrice ou ordinateur ou à l'aide d'un tableur, calculer les 40 premiers termes de cette suite.

PARTIE B : Construction géométrique d'une spirale

On construit un premier carré de côté $u_0 = 1$, un second carré de côté $u_1 = 1$ puis, en tournant dans le sens direct, des carrés dont le côté est la somme des deux côtés précédents.



1) Quelle relation de récurrence vérifie la suite (u_n) des côtés des carrés successifs ?

PARTIE C : Une suite auxiliaire

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

1) À l'aide d'un algorithme programmé sur calculatrice ou ordinateur ou à l'aide d'un tableur, calculer les 40 premiers termes de cette suite.
2) Conjecturer une valeur approchée de la limite de cette suite.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la suite (v_n) converge vers $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre est appelé nombre d'or.

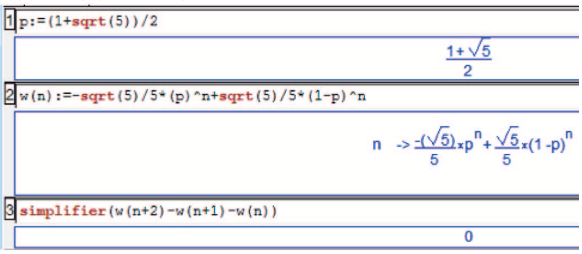
Partie D : Propriété du nombre d'or

1) Résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Que constate-t-on ?
2) En déduire que $\phi = \dfrac{1+\phi}{\phi} = \dfrac{1}{\phi - 1}$.

Partie E : Une autre suite...

Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$w_n = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\phi^n + \dfrac{\sqrt{5}}{5}(1-\phi)^n$.

1) Calculer les trois premiers termes de la suite.
2) On a obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel les résultats suivants.



Interpréter ces résultats.

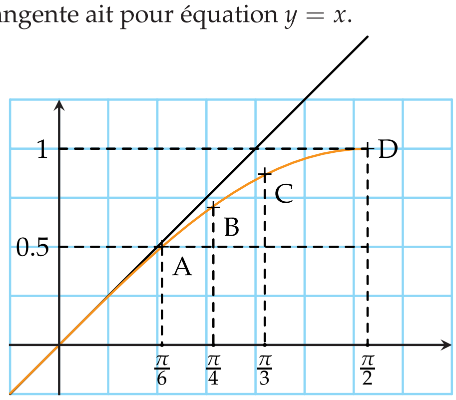
3) Rechercher des informations sur le nombre d'or : en architecture ; dans la nature...

31 L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction dérivée de la fonction sinus.

Partie A

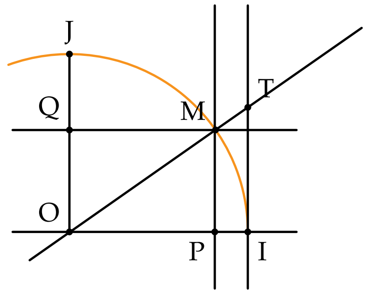
On a représenté sur la figure suivante la courbe de la fonction sinus $f : x \mapsto \sin x$ sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

On peut obtenir à l'aide d'un logiciel de géométrie que cette tangente ait pour équation $y = x$.



1) Que peut-on conjecturer pour le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 ?
2) Déterminer le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.
3) Pour démontrer le résultat conjecturé en 1), il faut étudier le quotient $\dfrac{\sin x}{x}$.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. Soit M le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = x$ avec $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.



1) Que valent les aires du secteur circulaire OIM, des triangles OIM et OIT ?
2) Justifier que $\dfrac{1}{2}\sin x \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{\cos x}$.
3) En déduire que $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$
4) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Conclure.

Partie B

En traçant les tangentes à la courbe de la fonction sinus en O, A, B, C et D, on a pu remplir le tableau suivant :

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0

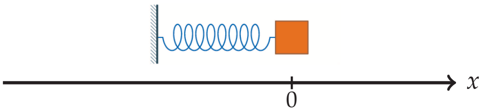
1) Que peut-on conjecturer pour la dérivée de la fonction sinus ?
2) Déterminer le taux d'accroissement de la fonction sinus entre$x$ et $x+h$.
3) Transformer l'expression précédente à l'aide des formules d'addition.
4) On a démontré que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ à la **partie A**. Remplir le tableau de valeurs suivant et conjecturer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h}$.

h	0,1	0,01	0,001
$\dfrac{\cos h - 1}{h}$			

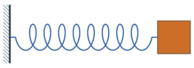
5) En déduire la fonction dérivée de la fonction sinus.

32 On considère un système masse-ressort horizontal, accroché à un support, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

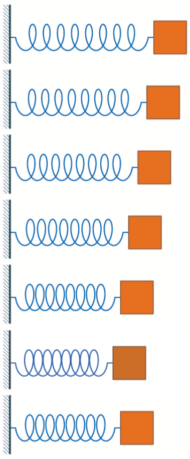
Position au repos :



On écarte le mobile de 1 cm par rapport à la position au repos . . .

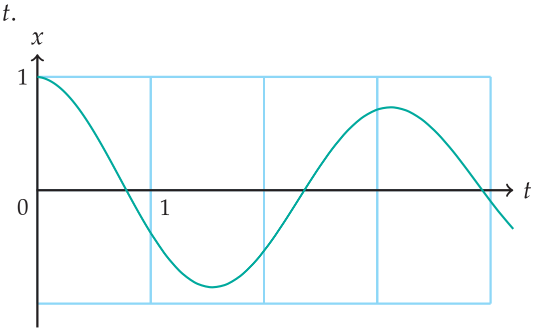


. . . et on le lâche. Le ressort induit alors une oscillation du mobile :



etc. . .

On note $x(t)$ (en cm) l'abscisse du mobile en fonction du temps (en s). Un relevé des positions du mobile nous donne la courbe suivante, représentant x en fonction de t.



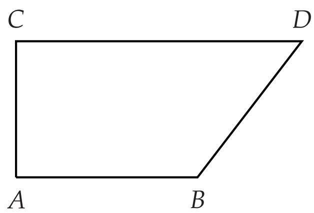
Par exemple, pour $t = 0$ s on a $x(0) = 1$ cm, pour $t \approx 0{,}78$ s on a $x(0{,}78) = 0$ cm, pour $t \approx 1{,}55$ s on a $x(1{,}55) = -0{,}86$ cm.

1) Représenter graphiquement la droite permettant de lire la vitesse moyenne (en cm·s^{-1}) entre les instants $t = 0$ s et $t \approx 1{,}55$ s puis calculer la valeur de cette vitesse.
2) Représenter graphiquement les droites permettant de lire les vitesses instantanées aux instants suivants puis donner des valeurs approchées de ces vitesses instantanées :

a) $t = 1{,}55$ s ; **b)** $t = 3{,}93$ s.

3) Comment interpréter une vitesse négative ?

33 On considère le trapèze $ABDC$ rectangle en A et tel que $AB = 4$ et $AC = 3$ représenté ci-dessous :



On cherche à déterminer par trois méthodes différentes, pour quelle(s) mesure(s) de $[CD]$, les droites (CB) et (BD) sont perpendiculaires.

Partie A : Avec des équations de droites

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$.

1) Déterminer l'équation de la perpendiculaire à (CB) passant par B.
2) En déduire les coordonnées de D puis la distance CD.

Partie B : Avec des coordonnées et le produit scalaire

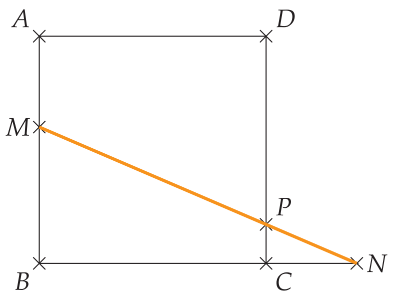
On se place toujours dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ et on considère $D(x\,;\,3)$.

1) Exprimer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de x.
2) En déduire les coordonnées de D puis la distance CD.

Partie C : Avec des décompositions de vecteurs

1) Développer $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right)$.
2) En déduire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de CD.
3) Conclure.

34 Soit $ABCD$ un carré de côté 1 et M un point libre sur le segment $[AB]$. On place le point N sur la demi-droite $[BC)$ de telle sorte que $CN = AM$. La droite (MN) coupe $[CD]$ en P.
Où placer le point M pour que la longueur CP soit maximale ?



35 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$, $A\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ et M un point mobile sur $\mathcal{P}$, d'abscisse x.

1) Déterminer une expression de AM en fonction de x.
2) a) Justifier qu'il suffit de déterminer les variations de $x \mapsto AM^2$ pour en déduire les variations de $x \mapsto AM$.
   b) Déterminer les variations de $x \mapsto AM^2$ sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire que les deux points $M_1(1;1)$ et $M_2(-1;1)$ minimisent la distance AM.
3) a) Déterminer les équations des droites $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, tangentes à $\mathcal{P}$ respectivement aux points M_1 et M_2.
   b) Déterminer, s'il existe, leur point d'intersection.
   c) Que peut-on dire de (AM_1) et $\mathcal{T}_1$? de (AM_2) et $\mathcal{T}_2$?
4) On considère à partir de maintenant que le point A a pour coordonnées $(0;a)$, $a \geq 0$.
   a) En étudiant les variations de $x \mapsto AM^2$, démontrer que si $a > \dfrac{1}{2}$, il existe deux points M_1 et M_2 minimisant la distance AM dont on donnera les coordonnées et que si $a \leq \dfrac{1}{2}$, il n'existe qu'un seul point M_0 dont on donnera aussi les coordonnées.
   b) On se place dans le cas où $a > \dfrac{1}{2}$.
   Déterminer les équations des droites $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, tangentes à $\mathcal{P}$ respectivement aux points M_1 et M_2 puis, s'il existe, leur point d'intersection. Que peut-on dire de (AM_1) et $\mathcal{T}_1$? de (AM_2) et $\mathcal{T}_2$?
   c) On se place dans le cas où $a \leq \dfrac{1}{2}$.
   Déterminer l'équation de $\mathcal{T}_0$, tangente à $\mathcal{P}$ en M_0. Que peut-on dire de (AM_0) et $\mathcal{T}_0$?

36 Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(3;1)$ et $B(-6;4)$.

1) a) Déterminer une équation de $\mathscr{C}_1$, le cercle de centre A et de rayon 5.
   b) Déterminer C et D, les points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et de l'axe des ordonnées.
   On appellera C le point d'ordonnée positive.
2) a) Déterminer une équation de $\mathscr{C}_2$, le cercle de diamètre $[OB]$.
   b) Déterminer les coordonnées de E, le point d'intersection de $\mathscr{C}_2$ et de l'axe des abscisses distinct de O.
3) a) Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle CDE.
   b) Justifier que l'axe des abscisses est une hauteur de CDE.
   c) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H de CDE.
4) a) Soit I le milieu de $[CD]$. Déterminer une équation de la médiane issue de E dans le triangle CDE.
   b) Déterminer les coordonnées de G, point d'intersection des médianes du triangle CDE.
5) a) Démontrer que $P\left(-\dfrac{7}{4};1\right)$ est le centre du cercle circonscrit au triangle CDE.
   b) Démontrer que les points H, G et P sont alignés.

37 Le bon échantillon

Partie A

Des études très complètes ont montré que 3,25 % de la population française apprécient Justin Bieber.

On prélève un échantillon de 200 personnes dans la population française (celle-ci est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise) et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes appréciant Justin Bieber dans cet échantillon.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) Donner $P(X = 7)$.
3) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 10 personnes appréciant Justin Bieber dans cet échantillon.

Partie B

On appelle $F = \dfrac{X}{200}$ la variable aléatoire donnant la fréquence de personnes appréciant Justin Bieber dans l'échantillon de 200 personnes de la partie précédente.

1) Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de F.
2) a) Dans un échantillon de 200 personnes, 22 apprécient Justin Bieber. Que peut-on en penser ?
   b) Imaginer un contexte expliquant ce résultat.

38 Pour la rentrée de septembre, la société TEXASIO a lancé un nouveau modèle de calculatrice, la T1000.

1) a) Par ailleurs, TEXASIO a demandé aux vendeurs de « pratiquer des tarifs attractifs ».
   Le directeur de la société, M. Texasio, s'est rendu dans dix grandes surfaces et y a relevé les prix en euros de la T1000. Il a obtenu :
   49,90 ; 49,90 ; 49,90 ; 49,90 ; 48,90 ; 50 ; 49,90 ; 50 ; 50,90 ; 48,90.
   Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette série des prix en grande surface.
   b) Arnold, le fils de M. Texasio, fait la même vérification à l'aide d'un comparateur de prix sur internet. Sur les huit sites comparés, il obtient :

Prix	46,90	49,90	69,90
Nombre de sites	4	3	1

   Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette série des prix sur internet.
   c) D'après les deux questions précédentes :
   - les prix sont-ils plus élevés en grande surface ou sur internet ?
   - les prix sont-ils plus homogènes en grande surface ou sur internet ?
2) a) Calculer le couple médiane-écart interquartile pour chacune des deux séries précédentes.
   b) D'après la question précédente :
   - les prix sont-ils plus élevés en grande surface ou sur internet ?
   - les prix sont-ils plus homogènes en grande surface ou sur internet ?
3) Commenter et expliquer les résultats des questions 1.c et 2.b.

39 Une question parlementaire

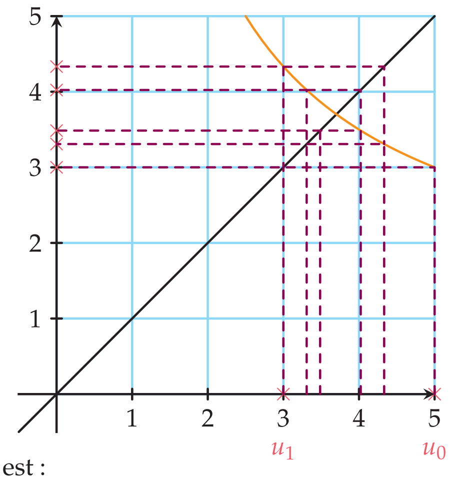
1) Le parlement européen est constitué de 751 députés venant des 28 différents états-membres de l'Union européenne. La répartition des députés par pays est donnée dans le tableau ci-dessous :

Nombre de députés	6	8	11	13	17	18	20	21	26	32	51	54	73	74	96
Nombre de pays	4	2	3	3	1	1	1	5	1	1	1	1	2	1	1

   Déterminer la médiane, les quartiles Q_1 et Q_3, la moyenne et l'écart-type de la série du nombre de députés par pays.
2) La chambre des représentants des États-Unis est constituée de 435 représentants issus des 50 états américains. Les indicateurs de la série du nombre de représentants par état sont :
   min$= 1$, $Q_1 = 3$, médiane$= 6$, $Q_3 = 10$, max$= 53$,
   moyenne$= 8,7$ et écart-type$\simeq 9,5$.
   a) Tracer sur le même graphique les diagrammes en boîte des séries du nombre de députés européens par pays de l'Union européenne et du nombre de représentants par état des États-Unis (on prendra pour unité 1 cm pour 10 députés ou représentants).
   b) Dans laquelle de ces deux institutions y a-t-il globalement le plus de représentants par état ?
3) Le coefficient interquartile relatif est défini par $\dfrac{\text{écart interquartile}}{\text{médiane}}$ et permet de mesurer la dispersion d'une série.
   a) Calculer les coefficients interquartiles relatifs des deux séries.
   b) Laquelle est la plus homogène ?
   c) Cela était-il prévisible en observant les diagrammes en boîtes ? Expliquer pourquoi.
4) Le coefficient de variation est défini par $\dfrac{\text{écart-type}}{\text{moyenne}}$ et permet lui aussi de mesurer la dispersion d'une série.
   a) Calculer les coefficients de variation des deux séries.
   b) Les résultats confirment-ils la réponse à la question 3.c ?

QCM BILAN

Dans le repère ci-dessous, on a construit les premiers termes d'une suite (u_n) définie par récurrence :



1 Une valeur approchée de u_2 est :

(a) 3,33 (b) 3,5 (c) 4,33 (d) 4

2 La suite (u_n) semble :

(a) ne pas avoir de limite (b) diverger vers $+\infty$ (c) converger

Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $q = 0,2$.

3 (u_n) est :

(a) croissante (b) décroissante (c) non monotone

4 La forme explicite de (u_n) est :

(a) $u_n = 10 + 0,2^n$ (b) $u_n = 0,2 + 10^n$ (c) $u_n = 0,2 \times 10^n$ (d) $u_n = 10 \times 0,2^n$

5 La suite (v_n), définie pour tout entier naturel non nul n par $v_n = 2n^2 - 3n + 4$, est :

(a) croissante (b) décroissante (c) non monotone

6 La suite (w_n) définie par $w_n = \cos(n\pi)$ pour tout entier naturel n :

(a) est arithmétique de raison -1

(b) est géométrique de raison -1

(c) est géométrique de raison π

(d) n'est ni géométrique ni arithmétique

Un romancier veut écrire un nouveau livre pendant le mois d'avril. Il décide qu'il écrira 20 pages le 1er avril puis 8 pages par jour du 2 au 30 avril.

7 Combien de pages comptera son roman ?

(a) 244 pages (b) 252 pages (c) 260 pages (d) 268 pages

8 Sachant que chaque jour, après avoir écrit, il relit l'intégralité de son roman, combien de pages aura-t-il lu en tout ?

(a) 4080 pages (b) 4200 pages

9 L'équation $x^2 - 6x + 3 = 0$

ⓐ n'a pas de solution réelle

ⓑ a pour solution $x = 3$

ⓒ a pour solutions $x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{24}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{24}}{2}$

ⓓ a pour solutions $x_1 = 3 - \sqrt{6}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{6}$

10 L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 2x > 3$ est :

ⓐ $]-\infty; -1[$ ⓑ $]3; +\infty[$ ⓒ $]-1\,;\,3[$ ⓓ $]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$

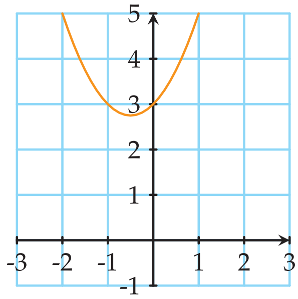
11 L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x| \geqslant 4$ est :

ⓐ $\{4\}$ ⓑ $\{4\,;\,-4\}$ ⓒ $[-4; 4]$ ⓓ $]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$

12 La fonction $x \mapsto \sqrt{-2x^2 + 6}$ définie sur $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ est :

ⓐ croissante sur $[-1; 0]$ ⓑ décroissante sur $[0; \sqrt{3}]$ ⓒ décroissante sur $[0; 2]$

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et $a \neq 0$, dont la courbe est donnée ci-dessous :



13 Sur la courbe, on peut lire que :

ⓐ $a > 0$ ⓑ $a < 0$ ⓒ $c > 0$ ⓓ $c < 0$

14 D'après la courbe, on sait que :

ⓐ le discriminant de $f(x)$ est strictement négatif

ⓑ le discriminant de $f(x)$ est strictement positif

ⓒ le discriminant de $f(x)$ est nul

ⓓ $f(x)$ n'a pas de racine réelle

15 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(a) = 0$ pour un réel a. On peut en déduire que :

ⓐ f est constante sur $\mathbb{R}$

ⓑ la courbe de f admet une tangente horizontale

ⓒ f admet un extremum local en a

ⓓ f admet un extremum en a

On considère deux fonctions g et h définies par $g(x) = -6x^2 + 3x - 5$ sur $\mathbb{R}$ et $h(x) = \dfrac{5x^2 + 2x + 3}{x + 1}$ sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

16 Une expression $g'(x)$ de la dérivée de g est :

ⓐ $-12x + 3$ ⓑ -12 ⓒ $-12x - 2$ ⓓ $-x + 3$

17 Une expression $h'(x)$ de la dérivée de h est :

ⓐ $10x + 2$ ⓑ $\dfrac{10x + 2}{(x + 1)^2}$ ⓒ $\dfrac{5x^2 + 10x - 1}{(x + 1)^2}$ ⓓ $\dfrac{5x^2 + 14x + 5}{(x + 1)^2}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x + 15$.

18 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) =$

(a) $-3(x-1)(x+1)$ (b) $-3(x^2+1)$ (c) $-3x^2+3$ (d) $-x^2+3$

19 On a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - 15}{h} =$

(a) -3 (b) 0 (c) 3 (d) $f'(0)$

20 Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est :

(a) $y = f'(1)(x+1) - f(1)$
(b) $y = 17$
(c) $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
(d) $y = f'(1)$

21 La fonction f' est :

(a) positive sauf entre -1 et 1
(b) négative sauf entre -1 et 1
(c) toujours du signe de -3
(d) jamais nulle

22 La courbe de la fonction f admet :

(a) aucune tangente ayant un coefficient directeur égal à 4
(b) une seule tangente horizontale
(c) une seule tangente dont le coefficient directeur est 3
(d) deux tangentes horizontales

23 La fonction f est :

(a) décroissante sur $[-1;1]$
(b) décroissante sur $]-\infty;-1]$
(c) croissante sur $[-1;1]$
(d) croissante sur $[1;+\infty[$

24 La fonction f est :

(a) positive sur $[-1;1]$
(b) positive sur $\mathbb{R}$
(c) positive sur $]-\infty;1]$
(d) négative sur $[1;+\infty[$

25 La fonction f admet :

(a) 17 comme maximum local (b) 17 comme maximum (c) un maximum sur $[-2;0]$

26 La fonction f admet :

(a) 13 comme minimum local (b) 13 comme minimum (c) 13 comme minimum sur $[-2;2]$

On appelle h la fonction définie en tout x tel que $f(x) \neq 0$ par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

27 La fonction h est :

(a) décroissante sur $[-1;1]$
(b) croissante sur $[-1;1]$
(c) décroissante sur $]-\infty;-1]$
(d) croissante sur $]-\infty;-1]$

28 On a $h'(0) =$:

(a) $-\dfrac{3}{225}$ (b) $-\dfrac{1}{[f(0)]^2}$ (c) $\dfrac{-f'(0)}{[f(0)]^2}$ (d) 0

29 $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ vaut :

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

30 L'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ admet pour solutions dans $]-\pi;\pi]$:

(a) $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (c) $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (d) $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$

31 Si $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$, alors $(-2\vec{v};3\vec{u})$ vaut :

(a) $-\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ (b) $\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ (c) $-\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ (d) $\frac{4\pi}{3}\ (2\pi)$

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1;-2)$, $B(2;0)$, $C(3;-1)$, $D(-1;5)$ et $E(-3;4)$.

32 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}$ vaut :

(a) -24 (b) -16 (c) 21 (d) -21

33 Les droites (AB) et (CD) sont :

(a) parallèles (b) perpendiculaires (c) sécantes

34 Le cosinus de l'angle $\widehat{ADB}$ est :

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}}{DA\times DB}$ (d) $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}{AD\times AB}$

35 Une équation de (AB) est :

(a) $-2x+3y+4=0$ (b) $3x+2y+7=0$ (c) $-3x+2y+1=0$ (d) $2x+3y+8=0$

36 Le point d'intersection des droites (AD) et (BC) a pour coordonnées :

(a) $(3;1)$ (b) $(-3;-1)$ (c) $(1;-3)$ (d) $(-1;3)$

37 Un vecteur normal à (AC) est :

(a) $\vec{n_1}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ (b) $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ (c) $\vec{n_3}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ (d) $\vec{n_4}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

38 Un vecteur directeur de la droite d'équation $2x+5y+2=0$ est

(a) $\vec{u_1}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ (b) $\vec{u_2}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ (c) $\vec{u_3}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ (d) $\vec{u_4}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

39 L'ensemble $\mathscr{C}$ d'équation $x^2-6x+y^2+2y+6=0$ est :

(a) le cercle de centre B et de rayon 4 (c) le cercle de centre C et de rayon 2

(b) l'ensemble vide

40 L'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $x+3y=6$

(a) contient deux points (b) contient le point $F(3;1)$ (c) contient le point $G(4,2;0,6)$

41 On considère deux points H et I tels que $FI=2$, $FH=3$ et $IH=3$. Alors $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{HI}$ vaut :

(a) 2 (b) -2 (c) $-\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{IH}$ (d) $-\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{IF}$

Marguerite est une vache laitière dont on a relevé la production journalière de lait pendant un mois.
On a obtenu :

Production de lait (en litres)	14	15	16	17	18	19	20
Nombre de jours	5	7	6	2	4	2	4

42 L'écart interquartile est :
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

43 L'écart-type, arrondi à 10^{-3}, est :
(a) 1,996 (b) 2,03 (c) 2,16 (d) 2

44 Le même mois, la production journalière de lait d'une autre vache, Coquelicot, a un écart-type de $3,1$. Laquelle des deux vaches a la production de lait la plus homogène pendant ce mois ?
(a) Marguerite (b) Coquelicot

Bobby joue à un jeu : il mise 7 €, puis lance un dé cubique équilibré. Il gagne alors le double du résultat du dé. On note X son gain algébrique après une partie.

45 On peut dire que :
(a) $E(X) = 0$ (b) $E(X) = -1$ (c) le jeu est équitable

46 L'écart-type $\sigma(X)$ vaut :
(a) $\sqrt{\frac{35}{3}}$ (b) 0 (c) $\sqrt{\frac{35}{12}}$ (d) $\frac{70}{6}$

Dans une usine produisant des stylos, un contrôle est mis en place pour tester la qualité des stylos fabriqués. On prélève un échantillon de 200 stylos dans le stock de l'usine, celui-ci étant suffisamment important pour que le prélèvement puisse être assimilé à un tirage avec remise.
Le gérant assure que la proportion de stylos défectueux dans le stock est de 1,5 % et, sous cette hypothèse, on note X la variable aléatoire donnant le nombre de stylos défectueux dans le prélèvement.

47 X suit une loi binomiale de paramètres :
(a) $n = 1,5$ et $p = 200$ (b) $p = 1,5$ et $n = 200$ (c) $n = 200$ et $p = 0,015$ (d) $n = 200$ et $p = 1,5$

48 En moyenne, on peut s'attendre à trouver :
(a) un stylo défectueux et demi (b) trois stylos défectueux

49 $P(X \leqslant 6)$ vaut environ
(a) $0,05$ (b) $0,015$ (c) $0,9676$ (d) $0,9887$

50 On a trouvé, dans un échantillon de 200 stylos, 9 stylos défectueux. Au seuil de 95 % :
(a) on peut rejeter l'hypothèse que la proportion de stylos défectueux est de 1,5 %
(b) on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la proportion de stylos défectueux est de 1,5 %

GÉOMÉTRIE

1

Vecteurs et droites du plan

Connaissances nécessaires à ce chapitre

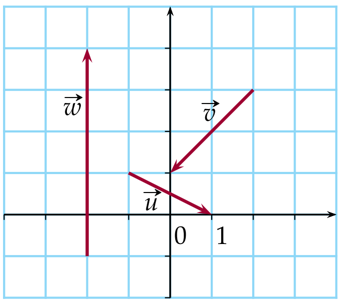
- Lire des coordonnées de vecteurs
- Calculer des coordonnées de vecteurs
- Effectuer des opérations sur les vecteurs
- Utiliser la relation de Chasles

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1

1) Lire graphiquement les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans le repère ci-dessous.



2) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

2 Dans un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-10{,}5\\3\end{pmatrix}$ et les points $A(-1\,;\,2)$, $B(6\,;\,0)$ et $C(5\,;\,-3)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $-3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}-2\vec{u}$.

3) Démontrer que $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

3 On considère la figure ci-dessous où $ABDGFE$ et $DGLKJI$ sont des hexagones réguliers de centre respectif C et H.

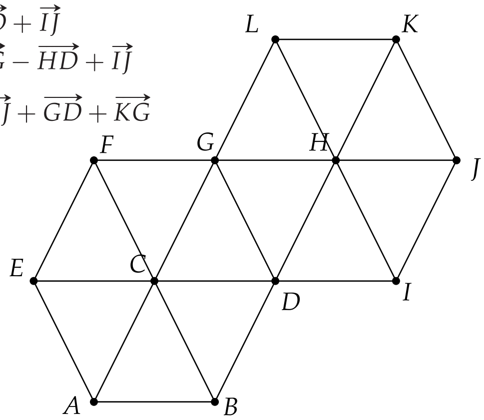
À l'aide de points de la figure, écrire ces sommes de vecteurs sous la forme d'un seul vecteur.

1) $\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HC}$

2) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{IJ}$

3) $\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{IJ}$

4) $\frac{1}{3}\overrightarrow{FJ}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{KG}$



4 À l'aide de la relation de Chasles, simplifier les expressions suivantes :

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 À la recherche du point inconnu

Dans un repère, on considère les points $A(3\,;\,-1)$, $B(4\,;\,1)$ et $C(5\,;\,9)$.
Déterminer les coordonnées du point :

1) E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$
2) F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
3) G tel que $\overrightarrow{GC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
4) H tel que $2\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}$

ACTIVITÉ 2 Des points, des x et des y

INFO

Partie 1 : Points sous conditions

Dans un repère, on considère les points $A(-1\,;\,1)$, $B(5\,;\,3)$ et $C(-5\,;\,-1)$.

1) Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2) Déterminer le réel x pour que le point $D(x\,;\,11)$ appartienne à la droite (AB).
3) **a)** Soit $M(x\,;\,y)$. Écrire une égalité portant sur x et y pour que M appartienne à (AB).
b) En utilisant l'égalité précédente, déterminer pour chacun des points $E(3\,;\,4)$ et $F(2\,;\,2)$ s'il appartient ou non à (AB).

Partie 2 : Un ensemble très cartésien

On considère maintenant l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que l'équation :

$$x + 3y + 1 = 0 \qquad (\mathbf{E})$$

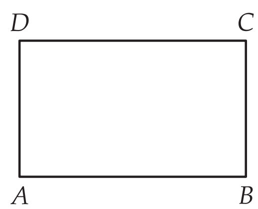
soit vérifiée.

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.
2) **a)** Les coordonnées du point $G(3\,;\,-1)$ vérifient-elles l'équation $(\mathbf{E})$?
b) Si oui, placer le point G dans le repère du logiciel en vert. Sinon, le placer en rouge.
On pourra modifier la couleur d'un point avec un clic droit sur le point, puis utiliser le menu Propriétés.
3) Faire de même avec les points $H(2\,;\,-1)$, $I(-2\,;\,2)$, $J(4\,;\,1)$, $K(-1\,;\,0)$, $L(-4\,;\,1)$, $N(4\,;\,-2)$ et $P(0\,;\,-0,3)$.
4) Quelle conjecture peut-on faire ?
5) Démontrer cette conjecture.

ACTIVITÉ 3 Dans un état de décomposition avancé

On considère un rectangle $ABCD$ et les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$.

1) Reproduire la figure ci-contre et y placer les points E et F.
2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et d'un autre vecteur judicieusement choisi. *On pourra prendre en compte la manière dont sont définis les points E et F.*
3) En déduire que les points E, F et C sont alignés.



Dans tout ce chapitre, les coordonnées sont données dans un repère du plan.

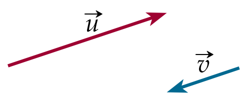
1. Colinéarité de deux vecteurs

DÉFINITION

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple

Ci-contre, $\vec{u} = -2\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



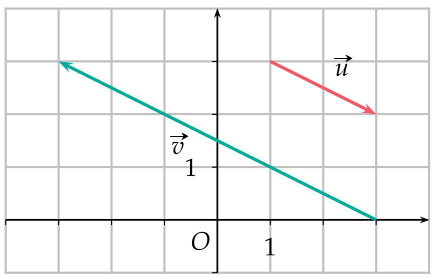
REMARQUE : Comme $0\vec{u} = \vec{0}$, on considère que le **vecteur nul** est colinéaire à tous les autres vecteurs.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs **coordonnées sont proportionnelles**.
Autrement dit, ils sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Comme on a $2 \times 3 - (-6) \times (-1) = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



PREUVE La propriété est évidente si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est un vecteur nul.
Montrons qu'elle est également vraie sinon.

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs colinéaires.

  Il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$. Il en résulte que :

  $xy' - x'y = (kx') \times y' - x' \times (ky') = kx'y' - kx'y' = 0$.
- Réciproquement, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls tels que $xy' - x'y = 0$.

  On a alors $xy' = x'y$, autrement dit les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont proportionnelles aux coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: si l'on note k le coefficient de proportionnalité, on obtient $x = kx'$ et $y = ky'$ c'est-à-dire $\vec{u} = k\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

PROPRIÉTÉ

On considère quatre points A, B, C et D avec A distinct de B et C distinct de D.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si, et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

MÉTHODE 1 Montrer que deux droites sont parallèles

► Ex. 8 p. 177

Exercice d'application

On considère quatre points $A(1\,;\,4)$, $B(3\,;\,-2)$, $C(-1\,;\,-2)$ et $D(-2\,;\,1)$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\-2-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\1-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, d'où :
$2\times 3-(-1)\times(-6)=6-6=0$.
On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, puis que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

PROPRIÉTÉ : Corollaire

Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

MÉTHODE 2 Déterminer si des points sont alignés

► Ex. 10 p. 177

Exercice d'application

On considère trois points $A(6\,;\,-1)$, $B(0\,;\,1)$ et $C(-3\,;\,2)$.
Les trois points A, B et C sont-ils alignés ?

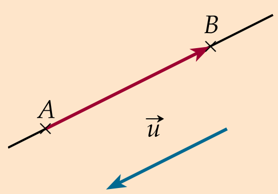
Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ d'où $-6\times 3-(-9)\times 2=-18+18=0$.
On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, puis que les points A, B et C sont alignés.

2. Équations cartésiennes d'une droite

DÉFINITION

Un vecteur $\vec{u}$ non nul est un **vecteur directeur** de la droite (AB) si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Autrement dit, un vecteur non nul est appelé vecteur directeur d'une droite lorsqu'il a la même **direction** que cette droite.



REMARQUE : Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.

PROPRIÉTÉ

Deux droites sont parallèles si, et seulement si, un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

Exemple

Soit $A(1\,;\,2)$, $B(5\,;\,4)$ et $C(-1\,;\,6)$.
La droite (AB) est-elle parallèle à d, la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$?

Correction

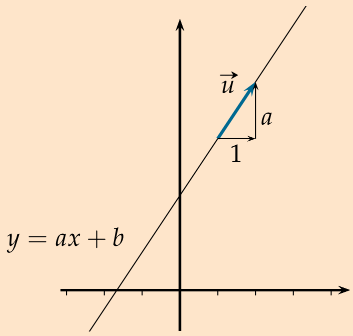
Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}$ puisque $\overrightarrow{AB} = -2\vec{u}$.

Comme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est directeur de la droite (AB) et le vecteur $\vec{u}$ est directeur de la droite d, les droites (AB) et d sont parallèles.

PROPRIÉTÉ

Soit a et b deux réels.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax + b$.

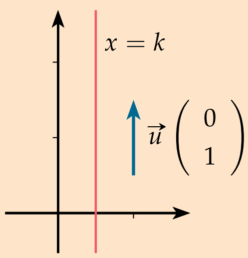


PREUVE En prenant $x = 0$, on trouve que le point $A(0\,;\,b)$ appartient à la droite d'équation $y = ax + b$. De même, avec $x = 1$, on trouve que le point $B(1\,;\,a+b)$ appartient à cette droite. Ainsi $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-0\\a+b-b\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax + b$.

PROPRIÉTÉ

Soit k un réel.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $x = k$.



PREUVE $A(k\,;\,0)$ et $B(k\,;\,1)$ sont deux points de la droite d'équation $x = k$.
Ainsi $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $x = k$.

Cours - Méthodes

PROPRIÉTÉ

Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et d la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A.
Un point M appartient à d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

PREUVE Pour $M \neq A$:
$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

PROPRIÉTÉ

L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarque : $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ signifie que a et b ne peuvent pas être nuls simultanément.

PREUVE Appelons D cet ensemble de points.

- Montrons d'abord que D n'est pas vide c'est-à-dire qu'il contient bien au moins un point. Pour cela, on procède par disjonction des cas.
  - Supposons d'abord que $a \neq 0$.
    On considère alors le point $A\left(-\frac{c}{a}\,;\,0\right)$ et on a :
    $ax_A + by_A + c = a \times \left(-\frac{c}{a}\right) + b \times 0 + c = -c + c = 0$ donc A appartient à l'ensemble D.
  - Supposons maintenant que $a = 0$.
    On a alors $b \neq 0$ (puisque $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$) et on montre de même que le point $A\left(0\,;\,-\frac{c}{b}\right)$ appartient à D.

  Dans les deux cas, il existe un point $A(x_A\,;\,y_A)$ qui appartient à D, c'est-à-dire tel que $ax_A + by_A + c = 0$.
- Soit $M(x\,;\,y) \in D$, on a alors $ax + by + c = 0$.
  Des égalités $ax_A + by_A + c = 0$ et $ax + by + c = 0$, on déduit par soustraction que :
  $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.
  Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$, en posant $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, on obtient :
  $M \in D \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)a - (-b) \times (y - y_A) = 0$:
  $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, autrement dit M appartient à la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ passant par A.

PROPRIÉTÉ : Réciproque

Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.

PREUVE On considère une droite d du plan, $A(x_A\ ;\ y_A)$ un point de d et $\vec{u}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d. Un point $M(x\ ;\ y)$ appartient à la droite d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
Cela revient à $(x - x_A) \times q - p \times (y - y_A) = 0$ soit $qx - py - qx_A + py_A = 0$. On a donc bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = q$, $b = -p$ et $c = -qx_A + py_A$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

DÉFINITION

Une équation d'une droite d de la forme $ax + by + c = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de la droite d.

REMARQUE : Une droite admet plusieurs équations cartésiennes mais au plus une seule équation de la forme $y = ax + b$, appelée **équation réduite** de la droite.

MÉTHODE 3 Déterminer une équation cartésienne de droite

► Ex. 27 p. 179

Exercice d'application

Déterminer une équation cartésienne de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ passant par $A(-1\ ;\ 4)$.

Correction

Soit $M(x\ ;\ y)$, on a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-4 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow (x+1) \times 2 - (-3) \times (y-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 2 - (-3y + 12) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 3y - 10 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de d est donc $2x + 3y - 10 = 0$.

MÉTHODE 4 Déterminer un vecteur directeur et un point d'une droite

► Ex. 28 p. 179

Exercice d'application

On considère la droite d d'équation $x - 3y + 1 = 0$.

1) Déterminer un vecteur directeur de la droite d.
2) Déterminer les coordonnées d'un point de d.

Correction

1) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix} -(-3) \\ 1 \end{pmatrix}$ soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2) On peut fixer une valeur pour une coordonnée et choisir ensuite l'autre pour que l'équation soit vérifiée.
   Ainsi, si on fixe $y = 0$ alors $x - 3 \times 0 + 1 = 0$ donc $x = -1$.
   Le point $A(-1\ ;\ 0)$ est donc un point de d.

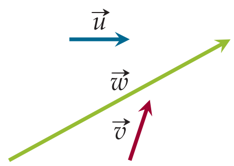
3. Décomposition d'un vecteur

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan non nuls et non colinéaires. Tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'écrit de façon unique sous la forme $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où x et y sont des réels.

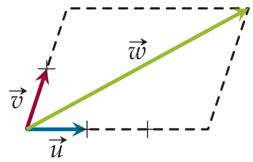
Exemple

Décomposer $\vec{w}$ selon $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Correction

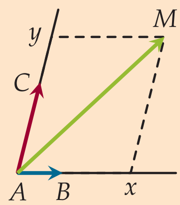
On trace des représentants de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de même origine et on construit un parallélogramme comme ci-dessous :



Graphiquement, on lit $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

PROPRIÉTÉ : Application aux repères du plan

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.
Pour tout point M du plan, il existe un **unique couple** de réels $(x\,;\,y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
Le triplet $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ définit donc un **repère** du plan et le couple $(x\,;\,y)$ est appelé le couple de **coordonnées** de M dans ce repère.



4. Norme d'un vecteur

DÉFINITION

- Soit A et B deux points. La **norme** de $\overrightarrow{AB}$, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, est définie par $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.
- Soit $\vec{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
  La **norme** de $\vec{u}$ est alors définie par $\|\vec{u}\| = AB$.

PROPRIÉTÉ

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé alors $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Pour tout réel k, on a $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

REMARQUE : De $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, on retrouve $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$ dans un repère orthonormé.

Exemple Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé. On a alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

S'entraîner

Dans tous les exercices, les coordonnées sont données dans un repère du plan.

Activités mentales

1 Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix} -14 \\ 28 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$

2 Déterminer une équation de la droite d passant par $A(0\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3 Déterminer un vecteur directeur de la droite d d'équation $y - 3x = 4$.

4 Donner l'équation réduite des droites suivantes.

1) d d'équation $x - y + 2 = 0$

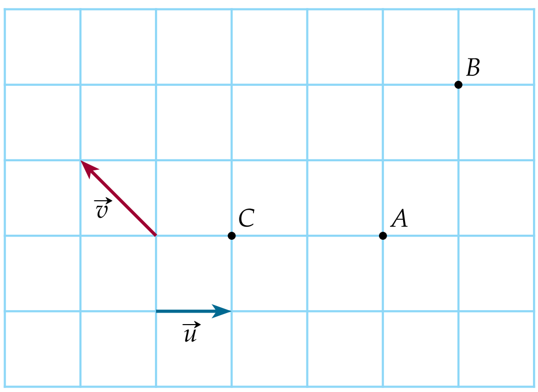
2) d' d'équation $6x + 2y = 1$

5 On considère la droite d d'équation cartésienne $-2x + 3y - 4 = 0$.

1) Le point $A(-1\,;\,2)$ appartient-il à la droite d ?

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d avec l'axe des abscisses.

6 On considère le graphique ci-dessous.



Donner la décomposition des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ selon les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Colinéarité et parallélisme

7 Déterminer si les couples de vecteurs suivants sont colinéaires.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) $\vec{a}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

3) $\vec{r}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix} -2 \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4) $\vec{a}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

5) $\vec{b}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{20} \\ -\sqrt{24} \end{pmatrix}$

8 ► MÉTHODE 1 p. 172

Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1) $A(3\,;\,-2)$, $B(-1\,;\,-1)$, $C(-3\,;\,2)$ et $D(1\,;\,3)$

2) $A(-9\,;\,-2)$, $B(1\,;\,3)$, $C(3\,;\,-2)$ et $D(1\,;\,-3)$

3) $A(-1\,;\,2)$, $B(-1\,;\,3)$, $C(3\,;\,2)$ et $D(4\,;\,2)$

4) $A\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{3}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}\,;\,3\right)$, $C\left(\frac{9}{5}\,;\,-1\right)$ et $D\left(-\frac{6}{5}\,;\,-2\right)$

5) $A(14\,;\,4)$, $B(-18\,;\,-12)$, $C(2\,;\,4)$ et $D(-18\,;\,-4)$

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites (CD) et (EH) sont parallèles.

1) $E(2\,;\,6)$, $H(10\,;\,6)$, $C(1\,;\,1)$ et $D(9\,;\,-1)$

2) $E(-3\,;\,10)$, $H(-3\,;\,2)$, $C(4\,;\,7)$ et $D(4\,;\,8)$

3) $E(2\,;\,3)$, $H\left(3\,;\,\frac{9}{2}\right)$, $C(-3\,;\,2)$ et $D(-1\,;\,5)$

4) $E\left(-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{3}{4}\right)$, $H(1\,;\,-2)$, $C(1\,;\,-1)$ et $D(9\,;\,-7)$

5) $E\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $H\left(0\,;\,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $C(\sqrt{3}\,;\,\sqrt{2})$ et $D(-\sqrt{3}\,;\,0)$

10 ► MÉTHODE 2 p. 172

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points A, B et C sont alignés.

1) $A(-9\,;\,4)$, $B(1\,;\,-1)$ et $C(4\,;\,-2)$

2) $A(-4\,;\,0)$, $B(-2\,;\,1)$ et $C\left(3\,;\,\frac{7}{2}\right)$

3) $A(-4\,;\,4)$, $B(-4\,;\,6)$ et $C(-3\,;\,2)$

S'entraîner

11 Dans chacun des cas, déterminer si les points suivants sont alignés.

1) $F\left(\frac{2}{3}\,;\,1\right)$, $G\left(-2\,;\,\frac{1}{3}\right)$ et $H(5\,;\,2)$
2) $B(0\,;\,0)$, $C(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6})$ et $D(4\,;\,4\sqrt{3})$
3) $E(1\,;\,2)$, $F(-3\,;\,8{,}28)$ et $G(3\,;\,2-\pi)$
4) $A(-6\,;\,4)$, $B(\sqrt{2}-2\,;\,-\sqrt{2})$ et $D(\sqrt{5}-2\,;\,-\sqrt{5})$
5) $C(\pi\,;\,\pi)$, $D(1\,;\,2-\pi)$ et $H(\pi-4\,;\,\pi-2)$

12 Soit $A(-3\,;\,1)$, $B(1\,;\,2)$ et $C(4\,;\,-1)$.

Trouver trois couples de coordonnées possibles pour D tel que $ABCD$ soit un trapèze.

13 Indiquer, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
2) Si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
3) Si $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{FG}$, alors E est un point de $[FG]$.
4) Pour tout réel x, $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{18}\\3x\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

14 Soit x un réel.

Déterminer toutes les valeurs de x possibles pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}2x+1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
2) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$
3) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{x}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$
4) $\vec{u}\begin{pmatrix}x+1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$

15 On considère les points $A(7\,;\,-1)$ et $B(-7\,;\,4)$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec les axes du repère.

16 ALGO

Écrire un algorithme qui :

- demande en entrée les coordonnées x_A, y_A, x_B, y_B, x_C et y_C de trois points dans un repère du plan ;
- indique en sortie s'ils sont alignés ou non.

17 A, B et C sont trois points du plan.
Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1) $\vec{u} = 4\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = -12\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
2) $\vec{u} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + \frac{15}{4}\overrightarrow{AC}$
3) $\vec{u} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{15}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -6\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

18 On considère deux points A et B et un point M tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où k est un réel.
Déterminer la ou les valeur(s) de k telles que :

1) A soit le milieu de $[MB]$;
2) M soit sur le cercle de centre B et de rayon $2AB$;
3) M appartienne à $[BA)$.

19 On considère deux points A et B dans le plan et le point R tel que :

$$2\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{AB}.$$

1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2) Que peut-on en déduire concernant les points A, B et R ?

20 On considère un triangle quelconque ABC.

1) Faire une figure.
2) On considère le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

   a) En utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de vecteurs formés des points A, B et C uniquement.
   b) Que peut-on dire des points A, C et M ?
   c) Placer le point M sur la figure.

21 ABC est un triangle. D est le point tel que :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.$$

Sans essayer de faire une figure, démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

22 A, B et C sont trois points distincts non alignés du plan. M est le point tel que :

$$2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{CA}.$$

1) Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
2) Que peut-on en déduire concernant le quadrilatère $AMBC$?

Équations cartésiennes de droites

23 On considère les droites d et d' d'équation respective $x - 4y - 5 = 0$ et $-2x + 3y = 4$.

1) a) Le point $A(1\,;\,-1)$ appartient-il à la droite d ?

b) Déterminer les coordonnées du point E d'abscisse 5 appartenant à la droite d.

c) Tracer la droite d dans un repère.

2) Tracer dans le même repère la droite d'.

24 On considère les droites d et d' d'équation respective $2x + y + 3 = 0$ et $3x - y + 1 = 0$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de d avec les axes du repère.

b) Tracer la droite d.

2) a) Trouver deux points à coordonnées entières qui appartiennent à d'.

b) Tracer la droite d' dans le repère précédent.

25 Tracer dans un repère les droites d et d' d'équation respective $4x - y + 5 = 0$ et $-x + 1,5y - 3,5 = 0$.

26 **Points inconnus**

On considère un paramètre réel m.

1) Soit d la droite d'équation $2x - 5y + 2 = 0$.
Trouver les éventuelles valeurs de m telles que $A \in d$.

a) $A\left(m\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$ **c)** $A(5m\,;\,2m+1)$

b) $A(0\,;\,m^2)$ **d)** $A(m^2 - 1\,;\,m)$

2) Reprendre la question précédente avec la droite d' d'équation $4x + 5 = 0$.

27 ► MÉTHODE 3 p. 175

Déterminer une équation cartésienne de la droite :

1) d_1 passant par $A(4\,;\,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

2) d_2 passant par $B(0\,;\,0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

3) d_3 passant par $C(0\,;\,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{r}\begin{pmatrix}1/3\\-1/2\end{pmatrix}$

4) d_4 passant par $D(1\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{s}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

28 ► MÉTHODE 4 p. 175

Donner un vecteur directeur et un point de la droite d d'équation.

1) $-x + y = 3$ **4)** $-2x + 1 = 0$

2) $12x + 25y - 7 = 0$ **5)** $y = 2x - 5$

3) $y - 7x = -8$ **6)** $\dfrac{x}{3} + y - 1 = 0$

29 Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) dans les cas suivants :

1) $A(1\,;\,2)$ et $B(0\,;\,3)$ **3)** $A(0\,;\,1)$ et $B(1\,;\,0)$

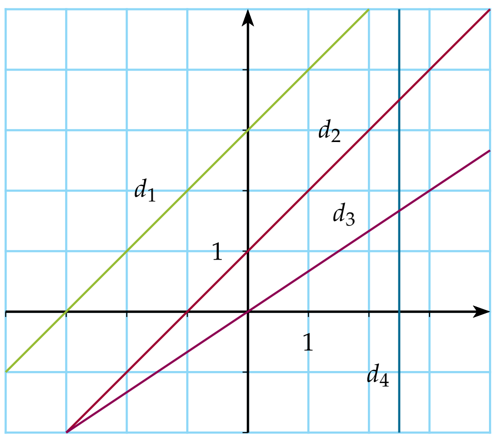
2) $A(0\,;\,5)$ et $B(-1\,;\,5)$ **4)** $A\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-1\right)$ et $B(2\,;\,-4)$

30 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points :

1) $C(2\,;\,0)$ et $D(4\,;\,-3)$ **3)** $F\left(\dfrac{1}{3}\,;\,3\right)$ et $R\left(2\,;\,-\dfrac{1}{5}\right)$

2) $E(2\,;\,3)$ et $H(2\,;\,-6)$ **4)** $L\left(\dfrac{1}{3}\,;\,5\right)$ et $N\left(\dfrac{4}{3}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$

31 On considère les quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4 tracées dans le repère ci-dessous.



Associer chaque droite à son équation.

1) $-x + y - 1 = 0$ **3)** $2x - 2y + 6 = 0$

2) $2x - 5 = 0$ **4)** $2x - 3y = 0$

32 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites d et d' sont parallèles.

1) $d : -x + y - 3 = 0$ et $d' : 3x + y + 1 = 0$

2) $d : 3x + 2y - 1 = 0$ et $d' : -6x - 4y - 1 = 0$

3) $d : \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 4$ et $d' : -2y + 3x = 0$

4) $d : x + 4 = 0$ et $d' : y - 1 + x = 0$

S'entraîner

33 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite d' parallèle à d passant par A.

1) $A(2\,;\,1)$ et d d'équation $-3x+y=0$

2) $A(-1\,;\,3)$ et d d'équation $-x-2y+1=0$

3) $A(1\,;\,1)$ et d d'équation $-\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+4=0$

4) $A\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ et d d'équation $-x+y-2=0$

34 Soit d la droite d'équation $3x-2y+1=0$.
Pour chacune des droites suivantes, indiquer si elle est parallèle, sécante ou confondue avec la droite d.

1) d_1 d'équation $2x-3y+1=0$

2) d_2 d'équation $6y-9x+1=0$

3) d_3 d'équation $\dfrac{7}{2}x-7y+21=0$

4) d_4 d'équation $1{,}5x-y=-0{,}5$

35 On considère les points $A(3\,;\,5)$, $B(6\,;\,4)$ et $C(3\,;\,-2)$ et la droite d d'équation $x-5y+7=0$.

1) La droite d et la droite (AB) sont-elles parallèles ?

2) Déterminer une équation de la droite d' parallèle à d passant par C.

3) On s'intéresse à un point D tel que $ABCD$ soit un trapèze de base $[BC]$.

a) Donner l'équation de la droite contenant D.

b) Tous les points de cette droite conviennent-ils ?

36 **Droites et systèmes**

1) **a)** Résoudre le système :

$$\begin{cases} 4x+11y-9=0 \\ 3x-0,5y+2=0 \end{cases}.$$

b) Interpréter géométriquement le résultat de la question précédente.

2) Même question avec le système :

$$\begin{cases} 4x-6y+1=0 \\ 14x-22=21y \end{cases}.$$

37 On considère les droites d_1, d_2 et d_3 d'équation respective :

- $d_1 : 2x+y+4=0$
- $d_3 : 3x-y+9=0$
- $d_2 : -x+2y-5=0$

1) **a)** Démontrer que d_1 et d_2 sont sécantes.

b) Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de d_1 et d_2.

2) Montrer que d_1, d_2 et d_3 sont concourantes.

38 On considère les points $A(-1\,;\,1)$ et $B(5\,;\,2)$ et la droite d d'équation $5x+4y-16=0$.

1) Démontrer que les droites d et (AB) sont sécantes en un point C.

2) Déterminer les coordonnées de C.

39 Soit m un réel. On considère la famille de droites $\mathcal{D}_m$ d'équation :

$$x+(m-1)y-m=0.$$

1) Tracer dans un repère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_{-1}$.

2) Démontrer que pour tout réel m, la droite $\mathcal{D}_m$ passe par un point A dont on donnera les coordonnées.

3) **a)** Peut-on trouver m tel que la droite $\mathcal{D}_m$ passe par le point $B(3\,;\,0)$?

b) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées ?

c) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses ?

40 On considère les droites d_1 et d_2 d'équation respective $-x+2y=0$ et $2x+y-5=0$.
Trouver une droite d_3, dont on donnera une équation cartésienne, telle que d_1, d_2 et d_3 soient concourantes.

41 On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ où m est un nombre réel et le point $A(-2\,;\,0)$.
Soit d_m la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1) Déterminer une équation de d_m.

2) **a)** Peut-on trouver m tel que le point $B(3\,;\,2)$ appartienne à d_m ?

b) Peut-on trouver m tel que d_m soit parallèle à la droite D d'équation $-5x+2y-7=0$?

c) Peut-on trouver m tel que d_m soit parallèle à la droite D' d'équation $-4x+12=0$?

3) Quels sont les points du plan qui n'appartiennent à aucune droite d_m ?

42 a, b et c étant trois réels, on considère la droite d d'équation $ax+by+c=0$ avec $(a\,;\,b)\neq(0\,;\,0)$.

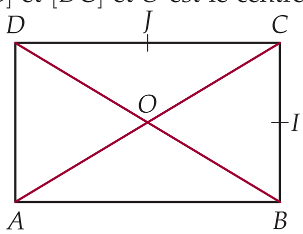
1) À quelle condition, portant sur les réels a, b et c, la droite d passe-t-elle par l'origine du repère ?

2) À quelle condition, portant sur les réels a, b et c, la droite d est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?

3) À quelle condition, portant sur les réels a, b et c, la droite d est-elle parallèle à l'axe des ordonnées ?

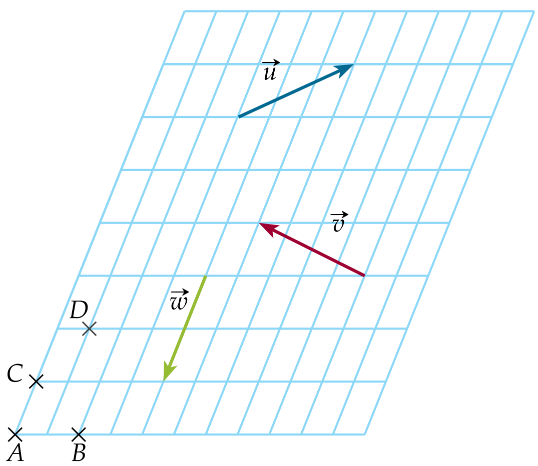
Décomposition et repère

43 $ABCD$ est un rectangle, I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$ et O est le centre du rectangle.



1) Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2) Même question avec les vecteurs $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

44 On considère la figure ci-dessous.



1) Décomposer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Décomposer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

45 On considère un triangle EFG.

1) Faire une figure et y placer le point H tel que :

$$\overrightarrow{EH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}.$$

2) En écrivant que $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}$, démontrer que $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires.
3) Que peut-on en déduire concernant le point H ?

46 $ABCD$ est un parallélogramme, F est le point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et E le point tel que $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.
2) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) Démontrer que (EF) et (BD) sont parallèles.

47 **Choisir la bonne décomposition**

On considère un triangle ABC et les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.

En utilisant une décomposition adaptée, montrer que les points A, E et D sont alignés.

48 On considère trois points F, G et H du plan et les points I et J tels que $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG} + 3\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$.

En utilisant une décomposition adaptée, montrer que les points F, J et I sont alignés.

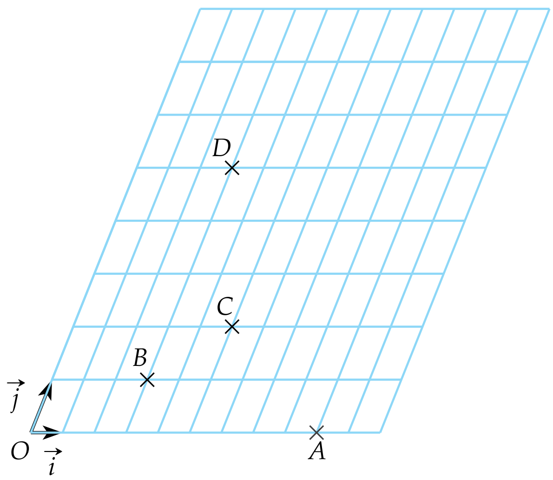
49 **Unicité de la décomposition**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires du plan.

On souhaite montrer que la décomposition de tout vecteur $\vec{w}$ selon $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est unique, c'est-à-dire que s'il existe quatre réels x, y, x' et y' tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et $\vec{w} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ alors $x = x'$ et $y = y'$.

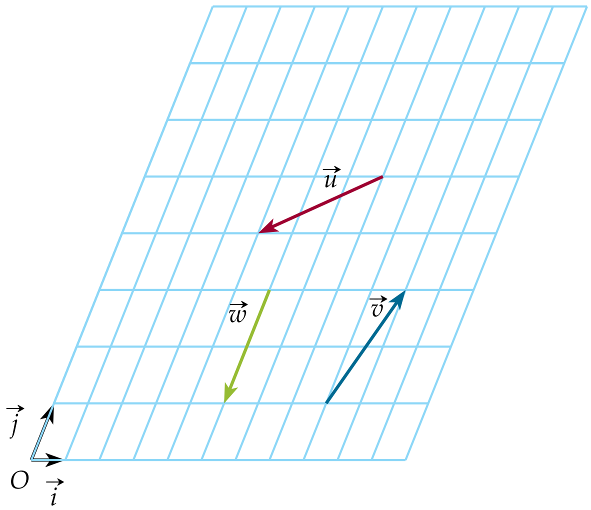
1) Montrer que si $x\vec{u} + y\vec{v} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ alors :
$$(x - x')\vec{u} = (y' - y)\vec{v}.$$
2) Montrer que si $x \neq x'$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
3) Conclure.

50 On considère la figure ci-dessous.



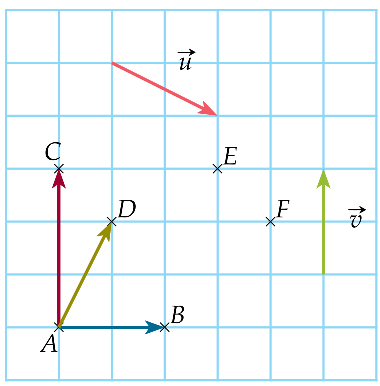
1) Lire graphiquement les coordonnées des points A, B, C, D dans le repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
2) a) Lire graphiquement les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ dans ce repère.
   b) Retrouver les résultats de la question précédente par le calcul.

51 On considère la figure ci-dessous.



1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans le repère $\left(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.
2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ et $\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{4}{3}\vec{v} + \vec{w}$.

52 On considère le quadrillage ci-dessous.



1) Donner par lecture graphique les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ et des points A, E et F dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
2) Même question dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

53 Dans un parallélogramme $ABCD$, on considère les points E et F définis par $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.
1) Déterminer les coordonnées de tous les points dans un repère bien choisi.
2) Démontrer que les points D, C et F sont alignés.

54 Dans un triangle ABC, on considère les points D, E et F définis par :

- $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On souhaite montrer, par deux méthodes différentes, que les points D, E et F sont alignés.

Partie A : En décomposant les vecteurs

1) Tracer un triangle ABC et y placer les points D, E et F.
2) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

Partie B : Avec un repère

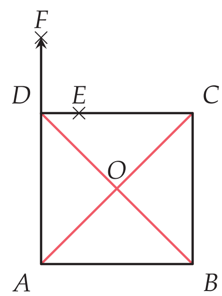
On se place dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
1) Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure.
2) Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

55 Dans un parallélogramme $ABCD$, on considère les points M, N et P tels que :

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Démontrer que les droites (MD) et (PN) sont parallèles.

56 Dans un carré $ABCD$ de centre O, on considère les points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.



En vous plaçant dans un repère convenablement choisi, démontrer que les points O, E et F sont alignés.

Norme d'un vecteur

Pour tous les exercices de cette section, on se place dans un repère orthonormé.

57 Calculer la norme des vecteurs suivants.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

2) $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

3) $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$

4) $\vec{r}\begin{pmatrix}3a\\-4a\end{pmatrix}$

58 On considère les points $A(-1~;~8)$, $B(6~;~12)$, $C(5~;~4)$ et $D(-2~;~0)$.

1) Calculer AB et BC.
2) Démontrer que $ABCD$ est un losange.

59 On considère les points $A(-2~;~3)$, $C(x~;~-1)$ et $B(1~;~y)$ où x et y sont des réels.

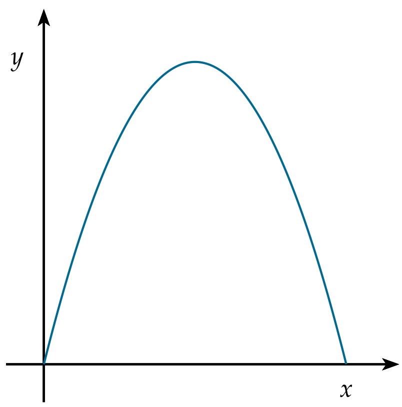
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 5.

1) Déterminer les valeurs possibles de y pour que B appartienne à $\mathcal{C}$.
2) Déterminer les valeurs possibles de x pour que C soit situé strictement à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

60 Un ballon de rugby est envoyé par un joueur de rugby situé à l'origine d'un repère, avant de retomber au sol.

En prenant le mètre pour unité graphique, le ballon suit la trajectoire donnée par l'équation :

$$y = -\frac{x^2}{10} + 4x.$$



1) À quelle distance du joueur le ballon va-t-il retomber ?
2) On cherche à déterminer quelle est la distance la plus éloignée entre le ballon et le pied du joueur lorsque le ballon suit la trajectoire.
   a) On note M la position du ballon après avoir parcouru x mètres horizontalement, et $f(x) = OM^2$. Montrer que $f(x) = 0{,}01x^4 - 0{,}8x^3 + 17x^2$.
   b) Déterminer une expression de $f'(x)$.
   c) Déterminer la distance maximale entre le joueur et le ballon.
3) Après avoir tapé dans le ballon, le joueur, dont les yeux sont situés à 1 m 50 du sol, guette le passage du ballon à l'horizontale de ses yeux.
   Quand il verra le ballon passer pour la seconde fois, à quelle distance du point de départ le ballon se trouvera-t-il ? On arrondira le résultat à 0,01 m près.

61 On considère un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé du plan et un réel k.

Démontrer que $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$.

62 On considère $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Déterminer les vecteurs colinéaires à $\vec{w}$ de norme 1.

63 **Vecteur directeur normé**

Déterminer tous les vecteurs directeurs de norme 1 de la droite :

1) d_1 d'équation $x - 8 = 2$
2) d_2 d'équation $2x + 3y + 5 = 0$
3) d_3 d'équation $y = 5x + 3$

64 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2~;~1)$, $B\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}~;~\frac{3}{2}\right)$ et $C\left(\frac{3}{2}~;~1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1) Montrer que $\left(A~;~\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère orthonormé du plan.
2) Trouver un autre repère orthonormé du plan.

65 On considère un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.

Montrer que $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

66 ALGO

Écrire un algorithme qui :

- demande en entrée les coordonnées x_A, y_A, x_B et y_B de deux points A et B ;
- affiche en sortie les réels a, b et c d'une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite (AB).

67 Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$ et G un point tel que :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}.$$

1) a) Démontrer que G, B et J sont alignés.

b) Que représente G pour le triangle ABC ?

2) a) Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) Existe-t-il un autre point M du plan tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$?

68 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et la droite d d'équation $5x - 2y + 7 = 0$.

1) Déterminer les points d'intersection de d et de $\mathcal{C}_f$.

2) Soit a un réel et A le point d'abscisse a de $\mathcal{C}_f$, on note T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.

a) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a, T_A et d sont parallèles.

b) Déterminer, lorsqu'il existe, les coordonnées du point d'intersection de T_A et de d en fonction de a.

69 Soit m un réel, on considère la famille de droites $\mathcal{D}_m$ d'équation :

$$(m+1)x - my - m - 2 = 0.$$

1) Tracer dans un repère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_{-2}$.

2) Montrer que toutes les droites $\mathcal{D}_m$ passent par un même point.

3) Peut-on trouver m tel que $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses ?

4) Peut-on trouver m tel que $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées ?

5) Déterminer, en fonction de m, les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathcal{D}_m$ avec les axes du repère.

70 **Programmation linéaire, d'après BAC**

Une petite entreprise fabrique des ours et des lapins en peluche.

La fabrication d'un ours en peluche nécessite 60 cm de tissu et 2 boutons (pour les yeux), celle d'un lapin nécessite 100 cm de tissu et 2 boutons.

Cette entreprise a également des contraintes :

- elle ne dispose que de 16 m de tissu par jour ;
- elle ne dispose que de 36 boutons par jour.

On considère que le coût du fil (nécessaire pour assembler les éléments, ainsi que pour broder les nez) est négligeable, si bien que l'entreprise en dispose à volonté.

On note x le nombre d'ours et y le nombre de lapins en peluche fabriqués par jour.

1) Traduire les contraintes de l'énoncé avec des inéquations portant sur x et y.

2) Montrer que les contraintes précédentes se traduisent par le système (S) suivant :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ 3x+5y & \leqslant & 80 \\ x+y & \leqslant & 18 \end{array}\right. .$$

3) Tracer dans un repère adapté les droites d'équations $3x + 5y - 80 = 0$ et $x + y - 18 = 0$.

4) Si l'entreprise produit 7 ours en peluche, combien de lapins en peluche peut-elle produire ?

5) L'entreprise réalise un bénéfice de 6 € sur un ours en peluche et un bénéfice de 8 € sur un lapin en peluche.

On suppose que l'entreprise vend toute sa production.

a) Exprimer en fonction de x et de y le bénéfice journalier qu'elle réalise.

b) Donner une équation de la droite qui correspond à un bénéfice de 120 €.

Tracer, dans le repère précédent, cette droite et donner un couple solution du système (S) correspondant à un bénéfice de 120 €.

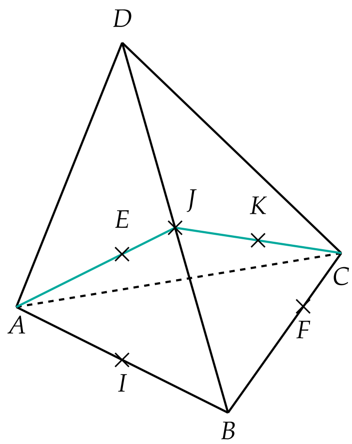
c) Déterminer graphiquement le nombre d'ours et de lapins en peluche à fabriquer par jour pour assurer un bénéfice maximal.

Expliquer brièvement votre méthode.

d) Quel est alors ce bénéfice maximal en euros ?

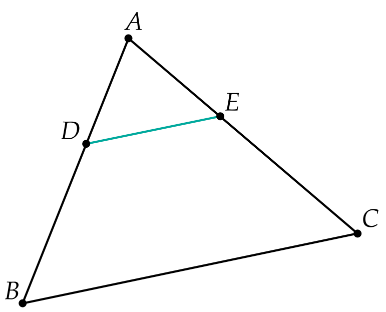
71 On considère deux vecteurs du plan $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ où x et y sont réels.
Déterminer pour quelles valeurs de x et y les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

72 Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$.
I, J et K sont les milieux de $[AB]$, $[BD]$ et $[JC]$ et E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.



1) a) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{DE}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b) Démontrer que les points I, E et D sont alignés.
2) Démontrer que les points F, K et D sont alignés en choisissant une décomposition de vecteurs du plan (BCD).

73 On considère la configuration suivante, où l'on a $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$ avec $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.



On souhaite démontrer la réciproque du théorème de Thalès :

$$\text{si } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \text{ alors } (DE)//(BC).$$

1) Démontrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$.
2) En déduire que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
3) Conclure.

74 Dans un triangle ABC, on considère deux points $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$ distincts des extrémités des segments.
On souhaite montrer, par deux méthodes différentes, le théorème de Thalès :
si (DE) et (BC) sont parallèles, alors :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Partie A : Avec les coordonnées

1) a) Donner les coordonnées de A, D et E dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
   b) Expliquer pourquoi il existe deux réels k et k' non nuls tels que l'on ait $B(k;0)$ et $C(0;k')$ dans ce repère.
2) a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction de k et k'.
   b) En déduire que si (DE) et (BC) sont parallèles, alors $k = k'$.
3) Exprimer :
   - $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et k ;
   - $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et k ;
   - $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{DE}$ et k.
4) Conclure.

Partie B : Géométriquement

1) Expliquer pourquoi il existe trois réels k, k' et k'' tels que :
   - $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{BC}$
   - $\overrightarrow{AD} = k'\overrightarrow{AB}$
   - $\overrightarrow{AE} = k''\overrightarrow{AC}$
2) Montrer que $k\overrightarrow{BC} = k'\overrightarrow{BA} + k''\overrightarrow{AC}$.
3) a) En déduire que $(k - k')\overrightarrow{BA} = (k'' - k)\overrightarrow{AC}$.
   b) Justifier que si $k \neq k'$ alors on obtient une contradiction avec la situation de départ.
   Que peut-on en déduire ?
   c) Justifier qu'alors $k = k''$.
4) Conclure.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Utiliser le critère de colinéarité pour démontrer
- le parallélisme de deux droites
- l'alignement de trois points

Déterminer une équation de droite
- avec un point et un vecteur directeur
- avec deux points

Une équation de droite étant donnée
- déterminer un vecteur directeur
- déterminer si des points appartiennent à la droite
- trouver des coordonnées de points de la droite
- tracer la droite

Un vecteur étant donné
- donner sa décomposition selon deux vecteurs non colinéaires
- donner ses coordonnées dans un repère

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On considère les points $A\left(0\,;\,-\frac{7}{3}\right)$, $B(3\,;\,-3)$, $C(5\,;\,-7)$, $D\left(1\,;\,-\frac{13}{3}\right)$ et $E(2\,;\,-3)$ dans un repère du plan.

75 Le point E appartient à la droite d'équation :

(a) $x+2y+4=0$ (b) $2x+10-3y=0$ (c) $-3x+2y=0$ (d) $-0,25x+\frac{1}{2}y=-2$

76 Un vecteur directeur de la droite d d'équation $2x-3y+1=0$ est :

(a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ (b) $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ (c) $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ (d) $\vec{r}\begin{pmatrix}-9\\-6\end{pmatrix}$

77 Le quadrilatère $ABCD$ est un :

(a) carré (b) losange (c) trapèze (d) parallélogramme

On considère les points $A\left(1\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $B(-2\,;\,0)$ dans un repère du plan.

78 La droite (AB) est parallèle à la droite d'équation :

(a) $6x+y+1=0$ (b) $3y-1=x$ (c) $3y+\frac{x}{2}=0$

On considère les droites d_1 et d_2 d'équation respective $2x+3y-7=0$ et $-5x+8y+2=0$.

79 Les droites d_1 et d_2 sont :

(a) sécantes (b) parallèles (c) confondues

80 Le point d'intersection des droites d_1 et d_2 a pour coordonnées :

(a) $(2\,;\,1)$ (b) $(-2\,;\,-1)$ (c) $(1\,;\,2)$ (d) $(-1\,;\,-2)$

81 Une droite d passe par l'origine du repère.
Une équation possible est :

(a) $x - 4 = 0$ (b) $y = 0$ (c) $3x + 4y - 1 = 0$ (d) $2x + \frac{y}{3} = 0$

A, B et C sont trois points du plan et D est le point tel que $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.

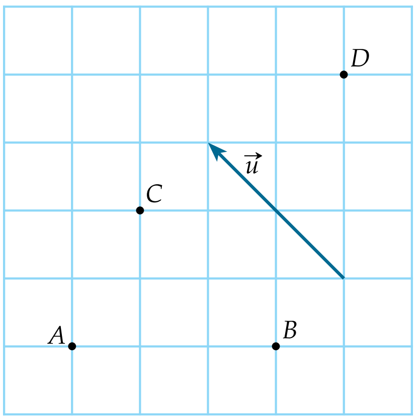
82 Une décomposition du vecteur $\overrightarrow{AD}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

(a) $\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ (b) $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ (c) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ (d) $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

83 Soit deux vecteurs $\vec{u} = 0{,}2\overrightarrow{AB} - 0{,}7\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = -2{,}4\overrightarrow{AB} + 8{,}4\overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$:

(a) sont colinéaires (b) ne sont pas colinéaires

On considère la configuration suivante.



84 Les coordonnées de D dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont :

(a) $(4\,;\,1)$ (b) $\left(\frac{2}{3}\,;\,2\right)$ (c) $(4\,;\,4)$ (d) $(2\,;\,2)$

85 Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

86 Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -5/6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$

Travaux pratiques

TP 1 Un quadrilatère particulier dans un quadrilatère quelconque

INFO

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.
2) Construire un quadrilatère $ABCD$ quelconque dans le plan.
3) Construire les points I, J, K et L, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
4) Construire le quadrilatère $IJKL$.
5) Déplacer les points A, B, C et D.
Quelle conjecture peut-on faire ?
6) **a)** Décomposer $\overrightarrow{IJ}$ selon un couple de vecteurs judicieusement choisi.
b) Démontrer la conjecture faite à la question 5.

TP 2 Appartient ? N'appartient pas ?

ALGO

1) On considère la droite d d'équation $\frac{1}{3}x - y + 1 = 0$ et le programme suivant, écrit avec Algobox.

```
VARIABLES
  XA EST_DU_TYPE NOMBRE
  YA EST_DU_TYPE NOMBRE
  R EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE XA
  LIRE YA
  R PREND_LA_VALEUR XA/3-YA+1
  SI (R==...) ALORS
    DEBUT_SI
  ...
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
  ...
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

a) Recopier le programme avec le logiciel Algobox.
b) Compléter le programme pour que, lorsque l'on donne en entrée les coordonnées XA et YA d'un point A, il renvoie en sortie si ce point appartient ou non à la droite d.

2) Écrire un programme qui remplit la même fonction, lorsque l'on donne en plus en entrée les coefficients a, b et c donnant une équation cartésienne d'une droite quelconque.

TP 3 Une histoire de mobile

Hélène a fabriqué un mobile à installer au-dessus du lit de sa fille. Celui-ci est constitué d'une tige de métal de 40 cm, matérialisée par le segment $[AB]$, sur laquelle pendent un triangle et un disque à chaque extrémité.

Le triangle pèse 1 décagramme et le disque pèse 3 décagrammes.

1 Comment accrocher le mobile ?

1) Voulant installer le mobile à un fil attaché au plafond, elle accroche le fil au milieu de la tige. Le mobile est-il d'aplomb ? Si non, de quel côté penche-t-il ?

2) Hélène se renseigne alors auprès d'un ami professeur de Physique qui lui explique qu'il faut accrocher le mobile en un point G tel que :

$$m_1\overrightarrow{GA} + m_2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

où m_1 et m_2 sont les masses respectives du triangle et du disque.

a) Écrire l'égalité vectorielle précédente en remplaçant m_1 et m_2 par leur valeur en décagramme.

b) Justifier que G appartient à (AB).

c) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

d) Tracer le segment $[AB]$ à l'échelle 1:10 et y placer le point G.

3) a) Reprendre les questions précédentes en prenant les masses m_1 et m_2 en **grammes**.

b) Que remarque-t-on ?

2 Un peu de théorie

Quand on considère deux points distincts A et B du plan et deux réels a et b non nuls tels que $a + b \neq 0$ alors il existe un unique point G vérifiant l'égalité vectorielle :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Ce point G est appelé **barycentre** des points pondérés $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$.

Soit A et B deux points distincts du plan.

1) a) En vous inspirant de la partie précédente, avec les mobiles, conjecturer quel est le barycentre de $(A\,;\,1)$ et $(B\,;\,1)$?

b) Vérifier par le calcul.

2) Soit G le barycentre des points pondérés $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$.

a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

b) Tracer un segment $[AB]$ mesurant 5 cm et y placer le barycentre des points pondérés $(A\,;\,4)$ et $(B\,;\,1)$.

3) Soit G' le barycentre des points pondérés $(A\,;\,k \times a)$ et $(B\,;\,k \times b)$ avec k réel.
Montrer que G et G' sont confondus.

Travaux pratiques

TP 4 La logique du système

INFO

1) On considère les points $A(-1\,;\,3)$ et $B(2\,;\,2)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

a) Construire les points A et B dans le repère puis tracer la droite (AB).

b) Vérifier le résultat de la question **1)** dans la fenêtre algébrique du logiciel de géométrie dynamique.

3) On s'intéresse maintenant au système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y = 8 \\ -10x + 6y - 4 = 0 \end{cases}.$$

a) Résoudre ce système par le calcul.

b) Entrer l'équation cartésienne de droite $-10x + 6y = 4$ dans la barre de saisie.

c) Retrouver géométriquement le résultat de la question **3)a)**.

4) Résoudre le système suivant et contrôler géométriquement :

$$\begin{cases} 3x - \dfrac{y}{2} = 2 \\ -2x + \dfrac{y}{3} = -1 \end{cases}.$$

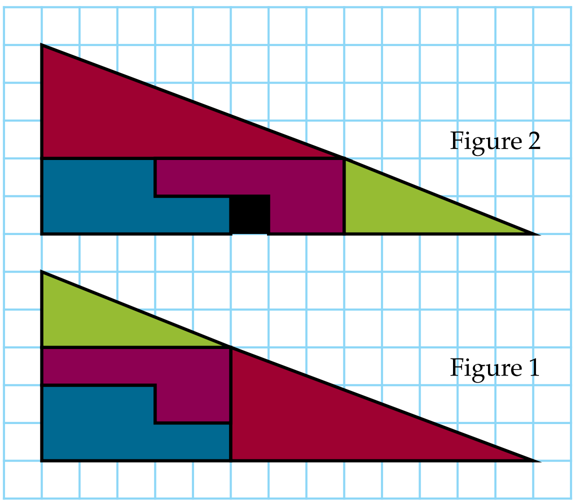
Récréation, énigmes

Points à coordonnées entières

Dans un repère orthonormé, soit $A(10\,;\,0)$, $B(10\,;\,10)$ et $C(0\,;\,10)$.
Déterminer l'ensemble des points à coordonnées entières sur la droite d d'équation $2x - 3y + 3 = 0$ situés à l'intérieur du carré $OABC$.

Un puzzle de Lewis Caroll

D'où provient le carré noir de la figure 2 ?



GÉOMÉTRIE

2

Angles orientés et trigonométrie

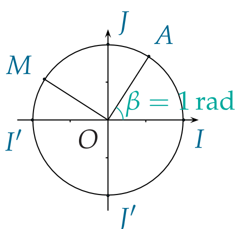
Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Connaître les angles géométriques
- Connaître les figures du plan
- Savoir les formules de trigonométrie
- Connaître le nombre π

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1



Le cercle ci-dessus, de centre O et de rayon 1, est appelé cercle trigonométrique.

1) Donner la longueur de l'arc $\widehat{IJ}$. Que vaut $\widehat{IOJ}$?

2) La mesure d'un angle géométrique $\widehat{IOM}$ en radians est égale à la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.
Compléter le tableau suivant donnant la correspondance entre la mesure en degré de l'angle $\widehat{IOM}$ et la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.

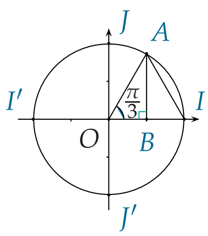
mesure en degré	60		90		180
longueur de l'arc		1		$\frac{5\pi}{6}$	π

2 On considère les nombres suivants :
$\frac{\pi}{4}, -\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

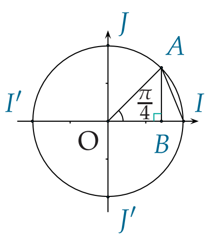
1) Ranger ces nombres dans l'ordre croissant.

2) Quels nombres appartiennent à $]-\pi\,;\,\pi]$?
à $[0\,;\,2\pi[$?

3



1) Quelle est la nature du triangle OAI ?
En déduire $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$.



2) Quelle est la nature du triangle OAB ?
En déduire $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$.

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

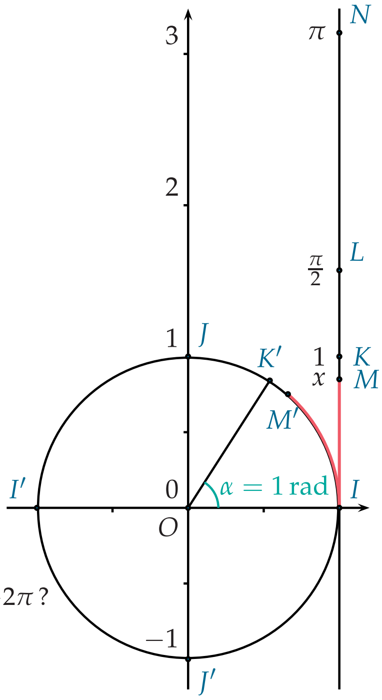
ACTIVITÉ 1 Du ruban au radian

$(O\ ;\ I, J)$ est un repère orthonormal et C est le cercle de centre O et de rayon 1, appelé cercle trigonométrique. La droite (IK), munie du repère $(I\ ;\ K)$ est enroulée autour de C.

Dans ce repère, M a pour abscisse x et les points K, L et N ont respectivement pour abscisses 1, $\dfrac{\pi}{2}$ et π.

Le point M de la droite (IK), tel que M a pour abscisse x dans le repère $(I\ ; K)$, a pour point-image sur le cercle C le point M' de sorte que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM'}$ est égale à la longueur IM.

Le point-image de K sur le cercle C est le point K'.



1) a) Quelle est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IK'}$?

b) En déduire une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOK'}$.

2) Point-images sur le cercle

a) Quels sont les point-images sur le cercle C des points L et N ?

b) En déduire une mesure en radian des angles $\widehat{IOJ}$ et $\widehat{IOI'}$.

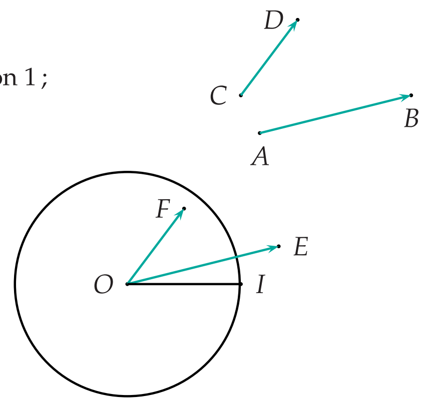
c) Quel est le point-image sur le cercle du point P d'abscisse 3π ?

d) Quel est le point-image sur le cercle C du point d'abscisse $-\pi$? -2π ?

e) En déduire le nombre de points sur la droite (IK) ayant pour point-image un point M donné sur le cercle.
Préciser leurs abscisses dans le repère $(I\ ;\ K)$.

ACTIVITÉ 2 Où est l'angle ?

INFO



1) Construire avec un logiciel de géométrie :

a) le point O centre du repère et le cercle C de centre O et de rayon 1 ;

b) quatre points A, B, C et D (B distinct de A et D distinct de C) puis les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2) On souhaite obtenir une mesure en radian de l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, que l'on note $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$

a) Construire les représentants des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ d'origine O.

b) Renommer les extrémités obtenues E et F respectivement, puis créer les points E' et F', points d'intersection des demi-droites $[OE)$ et $[OF)$ avec le cercle C.

c) Afficher l'angle géométrique $\widehat{E'OF'}$.

d) Déplacer le point D de sorte que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires de même sens, puis colinéaires de sens opposé.
Que remarque-t-on pour E' et F' ?
Noter la valeur de l'angle $\widehat{E'OF'}$ dans chaque cas.

3) La mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ est définie comme la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE'}, \overrightarrow{OF'}\right)$.

Elle est égale à la mesure de l'angle géométrique $\widehat{E'OF'}$ et comptée positivement si l'on tourne de E' vers F' dans le sens trigonométrique, négativement sinon.

a) Créer le point $I(1\ ;\ 0)$ puis replacer D à un endroit quelconque.

b) Afficher une mesure en radian de l'angle $\widehat{E'OF'}$.

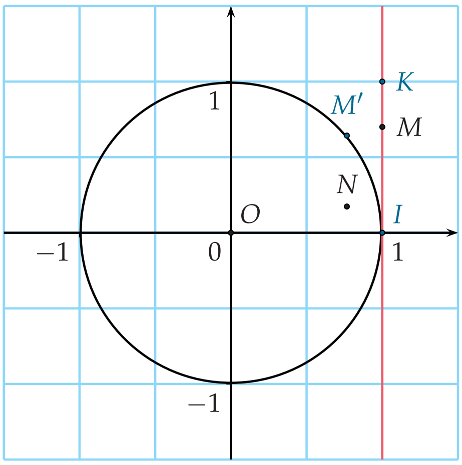
c) Déplacer les points A, B, C et D pour faire en sorte que :
$\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE'}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Que vaut alors $\left(\overrightarrow{OE'}, \overrightarrow{OF'}\right)$?

d) On pose $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE'}\right) = x$ et $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF'}\right) = y$.
Comment peut-on calculer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE'}, \overrightarrow{OF'}\right)$?

ACTIVITÉ 3 Cosinus en double

INFO

On utilise un logiciel de géométrie dynamique et on se place dans le repère orthonormé $(O\ ;\ I,\ J)$.



1) Tracer le cercle trigonométrique de centre O, le point $K(1\ ;\ 1)$ puis la droite (IK).

2) Créer un point M' sur le cercle C dans le demi-plan supérieur puis l'arc de cercle $\widehat{IM'}$ de centre O. Le point M' est le point image d'un point M sur le cercle C tel que la longueur IM soit égale à la longueur de l'arc $\widehat{IM'}$.
On note α la mesure, en radian, de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$. On a $\alpha \in [0\ ;\ \pi]$.

a) Quelles sont les coordonnées de M ?

b) Quelles sont les coordonnées de M' ?

3) On considère le point N de coordonnées $(\cos\alpha\ ;\ \cos 2\alpha)$.

a) Créer le point N en remarquant que $\alpha = y_M$, puis afficher la trace du point N lorsque le point M' décrit le cercle C.

b) L'abscisse x de N vérifie $-1 \leq x \leq 1$.
Quelle semble être la trajectoire décrite par le point N ?

c) On pose $y = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des nombres réels, l'équation de la courbe représentative correspondant à la trajectoire de N sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
On note sa forme canonique $y = a(x-e)^2 + f$ où e et f sont des nombres réels.
Déterminer e et f par lecture graphique puis en déduire a par le calcul.

d) En déduire la relation $\cos(2\alpha) = 2(\cos\alpha)^2 - 1$.

4) En utilisant cette relation :

a) calculer $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ à l'aide de $\cos\dfrac{\pi}{3}$;

b) calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$;

c) montrer que quel que soit x réel : $\cos 2\alpha = 1 - 2(\sin\alpha)^2$.

Cours - Méthodes

Dans ce chapitre, on munit le plan du repère orthonormé $(O\ ;\ I, J)$.

1. Repérage sur le cercle trigonométrique

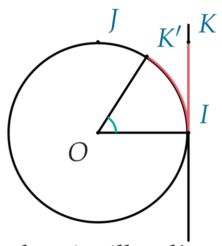
A. Enroulement de la droite numérique

DÉFINITION : Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique C est le cercle de centre O et de rayon 1. Il est muni d'un sens de parcours appelé **sens direct**, qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Avec ce choix, on dit que le **plan est orienté**.

RAPPEL :

Les points I et J sont situés sur le cercle trigonométrique. Soit K le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ dans le repère $(O\ ;\ I\ ,\ J)$. La droite (IK) a pour équation $x = 1$. C'est une droite numérique pour laquelle on considère le repère $(I\ ;\ K)$ dont l'origine est I et tel que $IK = 1$.



On enroule la demi-droite $[IK)$ autour du cercle C dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ainsi, à tout nombre réel x positif correspond un unique point-image M sur le cercle C.
Sur la figure, on voit K' le point-image de K sur le cercle trigonométrique.
En enroulant la demi-droite correspondant aux nombres réels négatifs dans le sens des aiguilles d'une montre, on fait également correspondre à tout nombre réel x négatif un point M sur le cercle C.
Dans chacun de ces deux cas, on dit que x a pour point-image M sur le cercle C. Si x' est un nombre obtenu à partir de x en ajoutant ou en enlevant un nombre de tours $(k \times 2\pi, k \in Z)$, alors x et x' ont le même point-image sur C. Ainsi, un point du cercle est l'image d'une infinité de réels (positifs et négatifs).

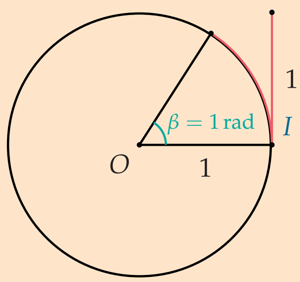
PROPRIÉTÉ

Tout nombre réel x a un point-image unique sur le cercle C.
S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + k \times 2\pi$, alors x et x' ont le même point-image sur le cercle C.

B. Le radian

DÉFINITION : Radian

La mesure en **radian** d'un angle est égale à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il intercepte.



Exemple Un angle plat (180°) mesure exactement π radians, soit environ 3,14 radians.

NOTATION : Le radian est noté rad. Cette notation est omise en général, contrairement à celle du degré.

PROPRIÉTÉ

Les mesures des angles en degré et en radian sont proportionnelles.

MÉTHODE 1 Convertir entre degrés et radians

Ex. 1 p. 203

Exercice d'application

Calculer les nombres x, y et z dans le tableau suivant de conversion entre degrés et radians.

Mesure en degré	0	30	y	150	180
Mesure en radian	0	x	$\frac{\pi}{2}$	z	π

Correction

$\frac{180}{30} = 6$ donc $x = \frac{\pi}{6}$ rad.

$\frac{\pi}{2}$ rad est la moitié de π rad, donc y est la moitié de 180 degrés, c'est-à-dire $y = 90°$ et $z = \frac{150 \times \pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$.

2. Mesures d'un angle orienté

DÉFINITION : Angle orienté

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On définit les points M et N tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont leurs représentants respectifs d'origine O. Soit M' et N' les points d'intersection des demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ avec le cercle trigonométrique.
Soit x et y deux nombres réels qui ont pour points-images M' et N', alors $y - x$ est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

REMARQUES :

- Si M est le point-image du réel x, alors $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = x$.
- Un angle orienté a une infinité de mesures différentes. Cependant, elles sont toutes égales à un nombre entier de fois 2π près, c'est-à-dire à un nombre $k \times 2\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$), ou encore modulo 2π. On ne le notera pas systématiquement mais c'est important de le savoir car une division (ou une multiplication) peut s'avérer problématique.
  L'équation $2x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ est équivalente à $x = \frac{\pi}{4} + k \times \pi$. Cette égalité entre x et $\frac{\pi}{4}$ est alors réalisée modulo π et non modulo 2π.

PROPRIÉTÉ : Mesure principale

L'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ a une unique mesure α dans l'intervalle, $]-\pi\,;\,\pi]$ appelée **mesure principale**.

Exemple Dans le repère orthonormé $(O\,; I, J)$, on a l'égalité $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Cours - Méthodes

MÉTHODE 2 Déterminer la mesure principale d'un angle orienté

► Ex. 4 p. 203

Pour obtenir la mesure principale :

- soit la mesure de l'angle est dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, c'est alors la mesure principale ;
- soit la mesure de l'angle est strictement supérieure à π. On retranche 2π, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à obtenir une mesure dans $]-\pi\ ;\ \pi]$;
- soit la mesure de l'angle est inférieure ou égale à π. On ajoute 2π, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à obtenir une mesure dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Exercice d'application

$(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{29\pi}{6}$.
Quelle est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$?

Correction

$\dfrac{29\pi}{6}$ n'est pas la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ car $\dfrac{29\pi}{6} \notin\ ]-\pi\ ;\ \pi]$.

Combien de fois 2π faut-il retrancher pour obtenir la mesure principale ?

On retranche 2π :
$\dfrac{29\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{29\pi}{6} - \dfrac{12\pi}{6} = \dfrac{17\pi}{6}$.
Mais $\dfrac{17\pi}{6} \notin\ ]-\pi\ ;\ \pi]$.
On retranche donc de nouveau 2π :
$\dfrac{17\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{17\pi}{6} - \dfrac{12\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$. $\dfrac{5\pi}{6} \in\ ]-\pi\ ;\ \pi]$.
La mesure principale de $\dfrac{29\pi}{6}$ est donc $\dfrac{5\pi}{6}$.

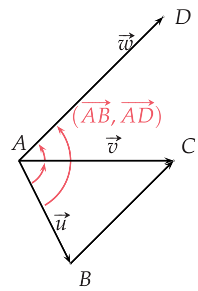
PROPRIÉTÉS

1) Relation de Chasles pour les angles
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls, alors $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$.

2) Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Remarques :

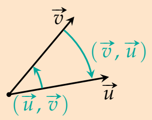
- La **relation de Chasles** pour les **angles orientés** est plus difficile à utiliser, en pratique, que la relation de Chasles pour les vecteurs. En effet, on peut écrire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
- Il est parfois intéressant dans les exercices d'écrire que la somme des angles d'un triangle est égale à π dans le sens trigonométrique :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi$.



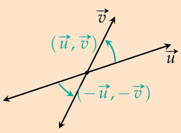
PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

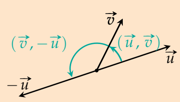
1) $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$



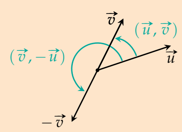
2) $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$



3) $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$



4) $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$



PREUVE

1) $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u})$ d'après la relation de Chasles.
On a $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = 0$ et donc $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$.

2) $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v})$ d'après la relation de Chasles.
Or $(-\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{v}, -\vec{v}) = \pi$ donc $(-\vec{u}, -\vec{v}) = 2\pi + (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$.

3) $(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v})$ d'après la relation de Chasles et $(-\vec{u}, \vec{u}) = \pi$.
Donc $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$.

4) De la même manière qu'en **3)** : $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v})$ et $(\vec{v}, -\vec{v}) = \pi$.
Donc $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$.

PROPRIÉTÉ : Généralisation de la propriété précédente

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k et k' deux nombres réels non nuls.

$$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = \begin{cases} (\vec{u}, \vec{v}) \text{ si } k \text{ et } k' \text{de même signe} \\ (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \text{ sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLES : $(2\vec{u}, 2\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ et $(2\vec{u}, -3\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$.

3. Cosinus et sinus d'un réel et d'un angle orienté

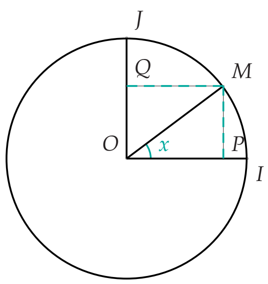
A. Repérage à l'aide du cosinus et du sinus

THÉORÈME : Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

Soit x un nombre réel et M le point-image de x sur le cercle trigonométrique C.
Le point M a pour coordonnées $(\cos x\ ;\ \sin x)$.

PREUVE

Soit M le point-image d'un réel x tel que $x \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
On note respectivement P et Q les projetés orthogonaux de M sur (OI) et (OJ).
Dans le triangle OPM rectangle en P :
$\cos x = \dfrac{OP}{OM}$. Or $OM = 1$ donc $OP = \cos x$.
Par conséquent, le point M a pour abscisse $\cos x$.
On montre de même que $\sin x = \dfrac{PM}{OM}$.
Or $PM = OQ$ et $OM = 1$, on en déduit que $OQ = \sin x$ et, par conséquent, M a pour ordonnée $\sin x$.
Si $x \notin \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut démontrer le théorème en utilisant des symétries.



EXEMPLES :

- Le nombre réel 0 a pour point-image $I(1\,;0)$ donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.
- Le nombre réel $\dfrac{\pi}{2}$ a pour point-image $J(0\,;1)$ donc $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

PROPRIÉTÉS

Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k :

1) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

2) $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

3) $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$

PREUVE Soit M le point-image du nombre réel x.

1) Ses coordonnées sont $(\cos x\ ;\ \sin x)$ et $M \in \mathcal{C}$ donc $OM = 1$, ce qui se traduit par $\sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = 1$ c'est-à-dire $\sqrt{(\cos x)^2 + (\sin x)^2} = 1$, d'où la conclusion.

2) L'égalité **1)** entraîne immédiatement $(\cos x)^2 \leqslant 1$ et $(\sin x)^2 \leqslant 1$ car les deux expressions $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$ sont positives ou nulles. Or quel que soit un réel, $x^2 \leqslant 1$ est équivalent à $-1 \leqslant x \leqslant 1$, d'où le résultat.

3) Soit M' le point-image du nombre réel $x + k \times 2\pi$. Les points M et M' sont confondus. Ils ont donc même abscisse et même ordonnée.

MÉTHODE 3 Calculer $\sin x$ quand on connaît $\cos x$

► Ex. 32 p. 206

1) On utilise l'égalité $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ pour calculer $(\sin x)^2$.
2) On détermine le signe de $\sin x$ en utilisant l'intervalle auquel appartient x :
   - si la mesure principale de x appartient à $]0\ ;\ \pi[$, alors $\sin x > 0$;
   - sinon si la mesure principale de $]-\pi\ ;\ 0[$, alors $\sin x < 0$.
3) On conclut sur la valeur exacte de $\sin x$.

Exercice d'application

Calculer $\sin \frac{\pi}{3}$ sachant que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Correction

$\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1$ est équivalent à $\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2$

soit $\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Donc $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

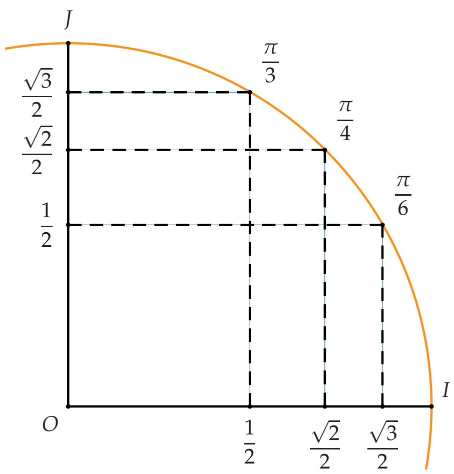
Or $\frac{\pi}{3} \in\ ]0\ ;\ \pi[$ donc $\sin \frac{\pi}{3} > 0$. En conclusion, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

REMARQUE : On calcule la valeur exacte de $\sin x$ quand on connaît $\cos x$ de la même façon. Si la mesure principale de $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos x \geq 0$ sinon $\cos x < 0$.

NOTATION : On note souvent $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ au lieu de $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$.

VALEURS PARTICULIÈRES :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



REMARQUE :

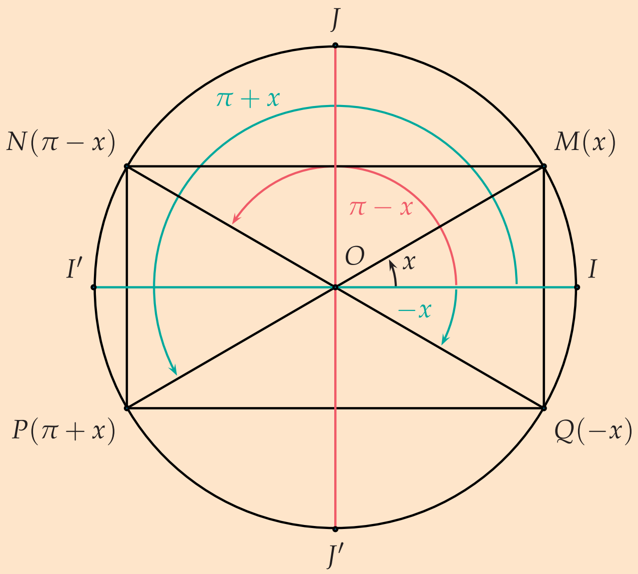
On note la symétrie du tableau. Elle est liée à la symétrie par rapport à la bissectrice de $\widehat{IOJ}$ qui passe par le point-image de $\frac{\pi}{4}$. Pour mémoriser ce tableau, il suffit donc de se rappeler des trois valeurs suivantes : $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. Angles associés

PROPRIÉTÉ : Angles associés

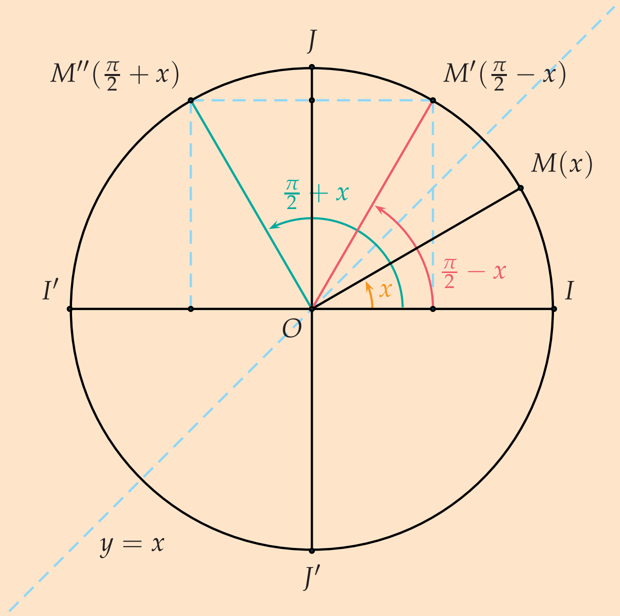
Pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$$



Pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$



Cours - Méthodes

Remarque : Les points I' et J' sont symétriques respectivement de I et de J par rapport au point O. Ce sont les points-images de π et $-\dfrac{\pi}{2}$: $\begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \sin \pi = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$.

MÉTHODE 4 Calculer une mesure des angles associés

► Ex. 41 p. 207

Exercice d'application

On sait que $\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. En déduire $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\cos \dfrac{4\pi}{3}$.

Correction

En appliquant directement la formule $\cos(-x) = \cos x$, il vient $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

De même, on peut remarquer également que $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$ et donc :

$\cos \dfrac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ car $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

C. Formules de duplication

PROPRIÉTÉ

Quels que soient les nombres a et b :

1) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

2) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

3) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

4) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

PREUVE

1) Admis ici.

2) On obtient cette égalité à partir de l'égalité **1)** en remplaçant b par $-b$:

$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

3) $\sin(a+b) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$

Et donc d'après **2)** $\sin(a+b) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$.

Or $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x. \end{cases}$

On en déduit donc $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

4) On remplace b par $-b$ dans l'égalité (3). Cela donne :

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

PROPRIÉTÉS

1) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

2) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

PREUVE

1) En remplaçant b par a dans la formule **1)** de la propriété précédente, on obtient la formule de duplication suivante : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

Or $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donc on peut remplacer $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$ dans la formule précédente et on obtient $\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$, formule qui a été conjecturée dans l'**activité 3** p. 193. En remplaçant $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$, on obtient également :

$\cos 2a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

2) En remplaçant b par a dans la formule **3)** de la propriété précédente, on obtient la formule de duplication suivante : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

MÉTHODE 5 **Utiliser une formule de duplication**

▶ Ex. 45 p. 207

Exercice d'application

1) On sait que $\cos x = 0,1$, calculer $\cos 2x$. 2) Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ à l'aide de $\cos \frac{\pi}{4}$.

Correction

1) En utilisation la propriété précédente :
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times 0,1^2 - 1 = 0,02 - 1 = -0,98$

2) On peut remarquer que $\frac{\pi}{4} = \frac{2 \times \pi}{8}$ donc $\cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{2\pi}{8} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ et on peut en déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ en résolvant l'équation précédente : $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$, soit $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
Or $\frac{\pi}{8} \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ et on en déduit que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

4. Équations et inéquations trigonométriques

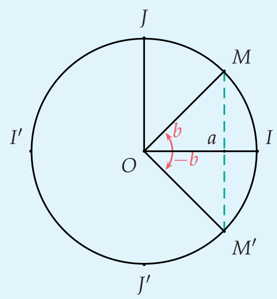
A. Équations $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ avec $a \in \mathbb{R}$

MÉTHODE 6 **Résoudre $\cos x = a$ avec $x \in \mathbb{R}$**

▶ Ex. 49 p. 207

Cela revient à chercher les points-images sur le cercle dont l'abscisse est égale à a.

1) Pour résoudre l'équation $\cos x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on résout d'abord cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
2) Dans le cas général, $a \in\,]-1\,;\,1[$.
Il existe un unique nombre b dans $]0\,;\,\pi[$ tel que $a = \cos b$.
Les solutions de $\cos x = \cos b$ sont par conséquent b et $-b$.
Une valeur approchée de b peut être obtenue à l'aide de la calculatrice : on met la calculatrice en mode radians puis on utilise $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{COS}}$ a.



3) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π :
$b + k \times 2\pi$ et $-b + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice d'application

Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

Correction

On sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. L'équation $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ a deux solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$:
$\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.
Dans $\mathbb{R}$, cette équation a une infinité de solutions. Les deux solutions précédentes sont encore valables plus toutes celles que l'on obtient en ajoutant ou en soustrayant un nombre entier de fois 2π.
Les solutions sont $\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

MÉTHODE 7 Résoudre $\sin x = a$ avec $x \in \mathbb{R}$

► Ex. 50 p. 207

Pour résoudre l'équation $\sin x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on résout d'abord cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

1) Dans le cas général $a \in]-1\,;\,1[$, il existe un unique nombre b dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = \sin b$. L'équation est donc équivalente à $\sin x = \sin b$, ce qui est équivalent à $x = b$ ou $x = \pi - b$.
2) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π : $b + k \times 2\pi$ et $\pi - b + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice d'application

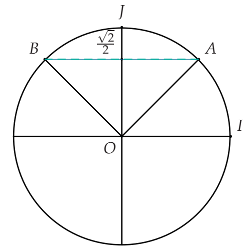
Résoudre l'équation $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction

On remarque que l'équation est équivalente à $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{4}$

Les solutions de cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$ sont $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ dont les points-images sur le cercle sont A et B.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc :
$\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $\dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



B. Inéquation du type $\cos x \geq a$ ou $\sin x \geq a$ avec $a \in I$, I intervalle donné

MÉTHODE 8 Résoudre une inéquation trigonométrique

► Ex. 54 p. 207

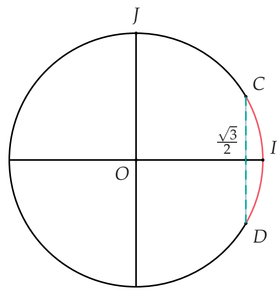
Exercice d'application

Résoudre l'inéquation $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

Correction

L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est équivalente à $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$ dont les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$. Les nombres dont le point-image sur le cercle a une abscisse supérieure strictement à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont compris strictement entre $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$ dans le sens trigonométrique.

L'ensemble des solutions de l'inéquation se lit donc sur le cercle : $S = \left]-\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right[$.



REMARQUES :

1) Des cas particuliers peuvent se présenter, il faut faire attention à traduire $\cos x \geq a$ (resp. $\sin x \geq a$) par : on cherche les nombres réels dont le point-image sur le cercle a une abscisse (resp. ordonnée) supérieure ou égale à a.
2) L'intervalle de résolution I n'est pas toujours $]-\pi\,;\,\pi]$. L'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ est un autre intervalle possible pour décrire le cercle trigonométrique. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0\,;\,2\pi[$ est $S = \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{11\pi}{6}\,;\,2\pi\right[$.

Activités mentales

1 ▶ MÉTHODE 1 p. 195

Préciser la mesure de l'angle géométrique correspondant en degré.

x (rad)	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
x (degré)						

2 Donner une mesure en radian des angles géométriques suivants.

x (degré)	30	45	75	90	135	150
x (rad)						

3 **Vrai ou Faux**

Ces nombres ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

1) $\frac{\pi}{5}$ et $-\frac{4\pi}{5}$

2) $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{21\pi}{5}$

3) $-\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{7\pi}{5}$

4) $-\frac{3\pi}{5}$ et $-\frac{18\pi}{5}$

4 ▶ MÉTHODE 2 p. 196

Donner la mesure principale des angles suivants.

1) 15π, -3π, -6π, 28π et $-\pi$

2) $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{2}$ et $\frac{26\pi}{2}$

5 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$. Donner une mesure de :

1) $(\vec{v}, \vec{u})$

2) $(\vec{u}, -\vec{v})$

3) $(-\vec{u}, -\vec{v})$

4) $(\vec{v}, -\vec{u})$

6 Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Donner une mesure de :

1) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}\right)$

2) $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right)$

4) $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}\right)$

7 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$ et $\vec{t}$ des vecteurs non nuls. Compléter.

1) $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = ...$

2) $(..., \vec{w}) + (..., \vec{t}) = (\vec{v}, \vec{t})$

3) $(\vec{t}, \vec{w}) + (..., \vec{t}) = (\vec{v}, \vec{w})$

8 Compléter.

1) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = ...$

2) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{...C}, \overrightarrow{A...}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

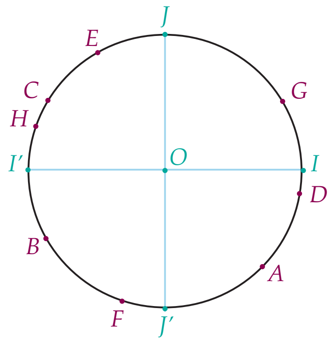
3) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A...}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{...B}\right)$

9 Compléter le tableau.

x en radian	$\frac{\pi}{3}$	...	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$	...
$\cos x$	...	$-\frac{1}{2}$	...	0	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin x$	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	-1	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Repérage

10 Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



1) À l'aide d'un rapporteur, associer à chaque point (de A à F) le nombre réel de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ dont il est le point-image :

$$\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{4},\ -\frac{5\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ -\frac{6\pi}{10}\text{ et }\frac{9\pi}{10}.$$

2) Donner les nombres réels dont les points-images sont les points précédents (de A à F), cette fois, dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.

11 Donner plusieurs nombres réels qui ont même point-image que :

1) $\frac{2\pi}{3}$

2) $-\frac{\pi}{5}$

3) $-\frac{27\pi}{4}$

4) $\frac{3\pi}{10}$

12 Donner tous les nombres réels qui ont même point-image que :

1) $\frac{\pi}{3}$

2) $-\frac{3\pi}{5}$

13 **Conversion**

1) Convertir les mesures des angles orientés suivants en degré :

$$\frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{5},\ \frac{5\pi}{8}\text{ et }\frac{2\pi}{3}.$$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels précédents.

S'entraîner

14 **Conversion**

1) Convertir les mesures des angles orientés suivants en degré :

$$\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}, \frac{7\pi}{8} \text{ et } \frac{\pi}{4}.$$

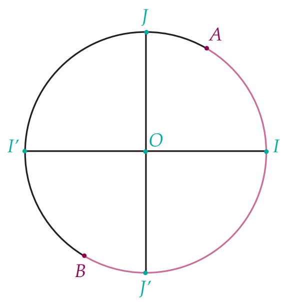
2) Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels précédents.

15 Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels suivants :

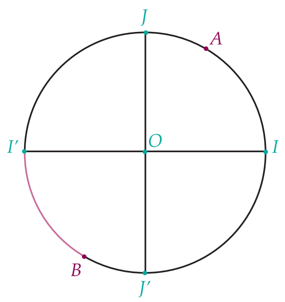
$$-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8} \text{ et } \frac{17\pi}{6}.$$

16 Soit A le point-image de $\frac{\pi}{3}$ et B le point-image de $-\frac{2\pi}{3}$. Déterminer l'ensemble des nombres réels compris dans $]-\pi\,;\,\pi]$ dont les points-images forment l'arc rouge (extrémités comprises).

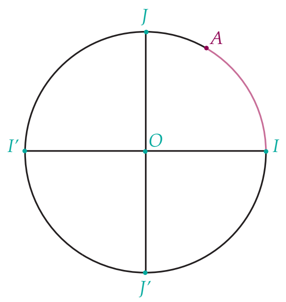
1)



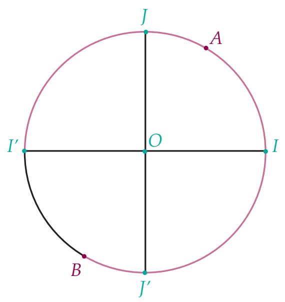
3)



2)



4)



17 **Intervalles**

Représenter en rouge sur le cercle trigonométrique, orienté dans le sens direct, l'arc de cercle correspondant aux points-images des nombres réels compris dans :

1) $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,0\right]$

2) $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]$

3) $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}\,;\,2\pi\right]$

4) $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

Mesures d'un angle orienté

18 On considère les points A , B, C, D et E, respectivement point-images des nombres suivants :

$\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.

Donner une mesure des angles orientés suivants :

1) $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right)$

2) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)$

4) $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right)$

5) $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}\right)$

6) $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}\right)$

19 $ABCD$ est un carré de centre O.

Donner une mesure des angles orientés suivants :

1) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

2) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$

4) $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AD}\right)$

5) $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$

6) $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$

20 Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

1) $-\frac{7\pi}{5}$

2) $\frac{18\pi}{4}$

3) $\frac{4\pi}{3}$

4) $\frac{7\pi}{10}$

21 ► MÉTHODE 2 p. 196

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

1) $-\frac{21\pi}{4}$

2) $\frac{37\pi}{7}$

3) $-\frac{2\pi}{3}$

4) $\frac{23\pi}{10}$

22 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.

Donner la mesure principale des angles orientés suivants :

1) $(-\vec{u}, -\vec{v})$

2) $(\vec{v}, \vec{u})$

3) $(-\vec{v}, -\vec{v})$

4) $(-\vec{v}, \vec{u})$

23 Soit A, B et C trois points tels que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{5}$.

Donner la mesure principale des angles orientés suivants :

1) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right)$

2) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$

4) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right)$

24 **Mesure principale** ALGO

1) a) Expliquer pourquoi on peut distinguer trois cas quand on calcule la mesure principale d'un angle orienté.

b) Un de ces trois cas est très simple à gérer. Pourquoi ?

2) Compléter l'algorithme ci-dessous.

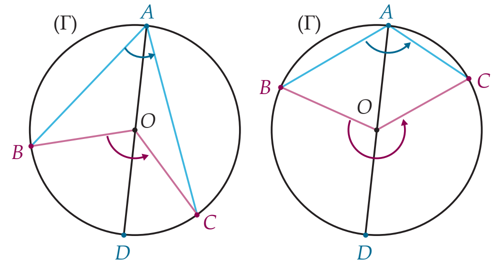
```
Algorithme : Mesure principale
Liste des variables utilisées
x : nombre réel
Traitements
Demander x
Si x> ... alors
    Tant que x>....
        Donner à x la valeur .....
    Fin Tant que
Sinon
    Si x ≤ ... alors
    Tant que x ≤  ...
        Donner à x la valeur .....
    Fin Tant que
    Fin Si
Fin Si
Affichage
Afficher « la mesure principale est : »
Afficher x
Fin de l'Algorithme
```

3) En pratique, cet algorithme n'est pas facile à utiliser car on connaît en général la mesure d'un angle orienté sous la forme $x = \dfrac{a\pi}{b}$.
Modifier l'algorithme précédent pour qu'il demande à l'utilisateur les deux nombres a et b, puis déterminer la mesure principale $\dfrac{a'\pi}{b'}$.

25 Soit A, B, C et D des points du plan tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Démontrer que le triangle ABD est rectangle en A.

26 A, B, C et D sont des points tels que : $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, BCA est rectangle en B et direct (c'est-à-dire) $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.
Montrer que les points A, C et D sont alignés.

27 Soit A, B et C trois points d'un cercle (Γ) de centre O. Soit D le point diamétralement opposé à A sur (Γ).



1) a) Montrer en utilisant la relation de Chasles que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

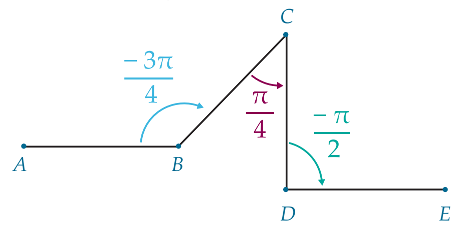
b) Exprimer que la somme des angles du triangle AOB est égale à π.

c) En déduire que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)$.

2) On peut montrer de même que : $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right)$.
En déduire que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

3) Compléter l'énoncé du théorème :
« L'angle au .... est égal au double de l'angle inscrit interceptant le même .... »

28 $ABCDE$ est la ligne brisée ci-dessous.



Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

29 **Problème de construction**

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$ cm.

1) Construire le point C tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $AB = AC$.

2) Construire le point D tel que ACD soit un triangle équilatéral et $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

3) Construire le point E tel que $\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}\right) = \dfrac{11\pi}{12}$ et $DE = 3$ cm.

4) Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

5) Construire F tel que A, F et C soient alignés et $\left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{5\pi}{12}$.

6) Démontrer que les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

S'entraîner

Cosinus et sinus d'un nombre réel

30 Donner les coordonnées des points A, B et C points-images des nombres réels $\frac{\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

31 Donner les coordonnées des points A, B et C points-images des nombres réels $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique.

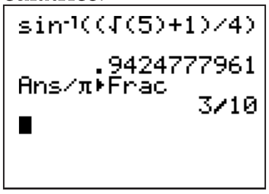
32 ► MÉTHODE 3 p. 198

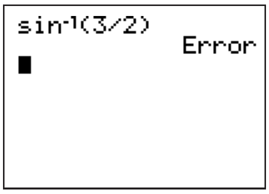
Soit x un nombre réel tel que $\cos x = \frac{1}{4}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$. Calculer $\sin x$.

33 Soit x un nombre réel tel que $\sin x = \frac{1}{5}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$. Calculer $\cos x$.

34 CALC

Un élève a obtenu les deux écrans suivants avec sa calculatrice.





1) a) Quelle équation a-t-il résolue dans l'écran de gauche ? Quelle solution de cette équation est donnée par la calculatrice ?
   b) L'équation précédente a-t-elle d'autres solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$?
2) Pourquoi a-t-il obtenu une erreur dans l'écran de droite ?

35 CALC

Déterminer dans chaque cas, s'il existe, le nombre réel x tel que :

1) $\sin x = -0,8$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$
2) $\sin x = 1,2$ et $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

36 CALC

Déterminer dans chaque cas, s'il existe, le nombre réel x tel que :

1) $\cos x = 2,1$ et $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$
2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$

37 ALGO

Le but de l'algorithme est de déterminer l'angle orienté x quand on connaît son cosinus c et le cadran n $(1 \leq n \leq 4)$ correspondant à x.

1) Compléter l'algorithme ci-dessous.

```
Algorithme : calcul du réel x
Liste des variables utilisées
c, x : nombres réels
n : nombre entier
Traitements
Demander c
Demander n
Si n = 1
    Donner à x la valeur cos⁻¹(c)
Sinon si n = 2
    Donner à x la valeur ..............
Sinon si n = 3
    Donner à x la valeur ..............
Sinon si n = 4
    Donner à x la valeur ..............
Fin Si
Affichage
Afficher « l'angle orienté est : »
Afficher x
Fin de l'algorithme
```

2) Modifier l'algorithme précédent pour qu'il donne l'angle orienté x en connaissant son sinus noté s et le cadran n.

38 Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont nulles quel que soit x réel ?

1) $\cos(x+\pi) - \cos(-x)$
2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x)$
3) $\sin(2\pi - x) + \sin(\pi + x)$
4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(4\pi + x)$

39 Calculer quel que soit x réel l'expression : $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$.

40 Donner la symétrie qui transforme le point-image du nombre réel x en le point-image du nombre réel y.

1) $x = \frac{\pi}{6}$ et $y = \frac{7\pi}{6}$
2) $x = \frac{\pi}{4}$ et $y = -\frac{\pi}{4}$
3) $x = \frac{\pi}{3}$ et $y = -\frac{\pi}{3}$
4) $x = -\frac{3\pi}{8}$ et $y = -\frac{5\pi}{8}$

41 ▶ MÉTHODE 4 p. 200

1) Calculer $\sin\dfrac{5\pi}{4}$, $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\dfrac{5\pi}{6}$.

2) On sait que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

En déduire $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

42 En utilisant les angles associés, calculer la valeur exacte des coordonnées du point-image M des nombres réels suivants :

1) $\dfrac{3\pi}{4}$ **3)** $\dfrac{13\pi}{4}$

2) $-\dfrac{\pi}{6}$ **4)** $-\dfrac{2\pi}{3}$

43

1) Calculer $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

2) En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

44 On sait que $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

En déduire :

1) $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ **3)** $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$

2) $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ **4)** $\cos\dfrac{13\pi}{12}$

45 ▶ MÉTHODE 5 p. 201

Calculer $\cos(2x)$ dans les cas suivants.

1) $\cos x = -\dfrac{1}{4}$ **2)** $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

46 Calculer $\sin 2x$ dans les cas suivants.

1) $\sin x = \dfrac{1}{3}$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$

2) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[$

47 Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

1) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$

48 Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

1) $\sin\left[2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)\right] - \cos(2\pi - x)$

2) $\sin^2(\pi + x) - \cos\left[2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right]$

49 ▶ MÉTHODE 6 p. 201

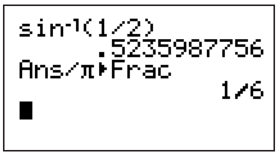
On considère l'équation $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Résoudre cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants.

2) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$.

50 ▶ MÉTHODE 7 p. 202 CALC

L'écran suivant obtenu avec la calculatrice correspond à la résolution d'une équation.



1) a) De quelle équation s'agit-il ?

b) Quelle est la solution obtenue ?

2) Résoudre cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

51

1) Résoudre l'équation $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ dans $\mathbb{R}$.

2) Préciser les solutions contenues dans l'intervalle $]0\,;\,4\pi]$

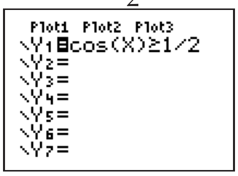
52 Montrer que l'équation $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ a quatre solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ puis placer sur le cercle trigonométrique les quatre points correspondants.

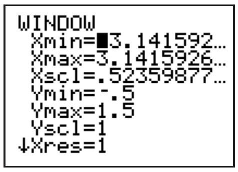
53 On considère l'inéquation $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$.

1) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

2) Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

3) Vérifier le résultat obtenu en définissant comme fonction le booléen $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$ qui vaut 1 en x si $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$ et 0 sinon.





où 3.141592... correspond à π et .52359877... correspond à $\dfrac{\pi}{6}$.

54 ▶ MÉTHODE 8 p. 202

On considère l'inéquation $\cos x > 0$.

1) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

2) Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

55 On considère l'inéquation $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

2) Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

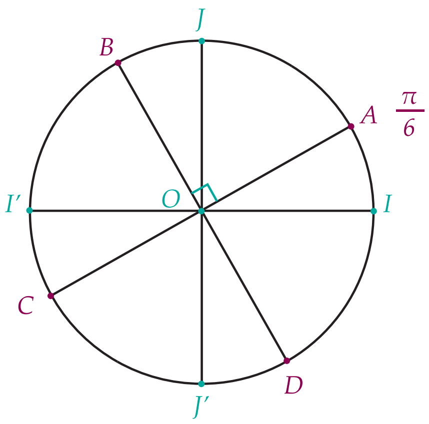
56 On considère l'inéquation $\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

2) Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

Approfondir

57 Déterminer une équation dont les solutions dans $]-\pi\ ;\ \pi]$sont des nombres réels dont les points-images sont les points A, B, C et D de la figure ci-dessous.



58 Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos x \geq \frac{1}{2} \\ \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

59 Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

60 On souhaite résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

1) On effectue un changement de variable.
On pose $X = \cos x$ avec $x \in [-1\ ;\ 1]$.
   a) Quelle équation du second degré est équivalente à **(1)** ?
   b) Montrer que son discriminant peut s'écrire : $4(1-\sqrt{3})^2$.
   c) Déterminer les solutions de cette équation du second degré.

2) En déduire les solutions de l'équation **(1)** dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

61 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(\sin 2x + 1)(2\cos x + \sqrt{2}) = 0.$$

62 **Triangle magique**

L'objectif est de résoudre le système d'équations dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

$$\begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

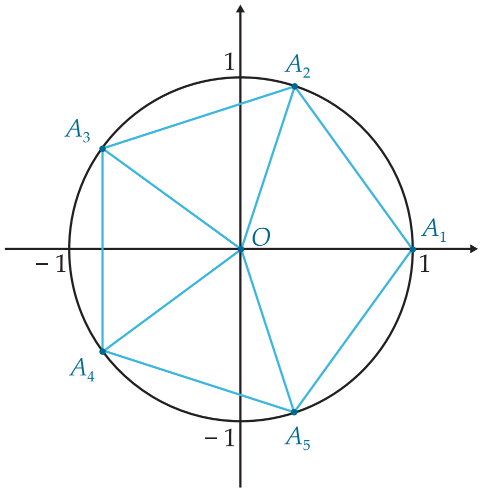
1) Première méthode
   a) Montrer que les solutions de l'équation $\cos 3x = 1$ dans $\mathbb{R}$ s'écrivent :
   $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   b) Montrer que les solutions de l'équation $\sin 3x = 0$ dans $\mathbb{R}$ s'écrivent :
   $x = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   c) En déduire l'ensemble des solutions du système d'équations **(1)** dans $\mathbb{R}$.
   d) Quelles sont les solutions du système d'équations **(1)** dans $]-\pi\ ;\ \pi]$?

2) Seconde méthode
   a) En utilisant les formules d'addition, montrer les égalités suivantes, quel que soit x réel :
   $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
   b) Montrer que l'équation $\cos 3x = 1$ est équivalente à $4X^3 - 3X - 1 = 0$ en posant $X = \cos x$ ($X \in [-1\ ;\ 1]$).
   c) Montrer que pour tout nombre réel X :
   $4X^3 - 3X - 1 = (X-1)(4X^2 + 4X + 1)$.
   d) En déduire les solutions de l'équation :
   $4X^3 - 3X - 1 = 0$
   et conclure sur les solutions de l'équation :
   $\cos 3x = 1$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.
   e) Vérifier que les solutions trouvées en **2)d)** sont également solutions de $\sin 3x = 0$.

3) Représentation graphique
   a) Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels solutions du système.
   On les notera I, A et B.
   b) Quelle est la nature du triangle IAB ?
   Justifier.

63 Pentagone régulier

Soit $A_1A_2A_3A_4A_5$ le pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.



On a donc $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = (\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}) = \ldots = (\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_4}) = (\overrightarrow{OA_4}, \overrightarrow{OA_5}) = (\overrightarrow{OA_5}, \overrightarrow{OA_1}) = \dfrac{2\pi}{5}$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 dans le repère ci-dessus.

b) Calculer $\sin\dfrac{2\pi}{5} + \sin\dfrac{4\pi}{5} + \sin\dfrac{6\pi}{5} + \sin\dfrac{8\pi}{5}$.

c) En déduire que le vecteur :
$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5}$
a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel que l'on déterminera.

2) En fait, on peut montrer que :
$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} = \vec{0}$
et donc $a = 0$. On l'admettra ici.

a) En déduire que $1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} + 2\cos\dfrac{4\pi}{5} = 0$.

b) En déduire que $4\cos^2\dfrac{\pi}{5} + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} - 1 = 0$.

c) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est donc une solution de l'équation du second degré $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

64 Portée maximale

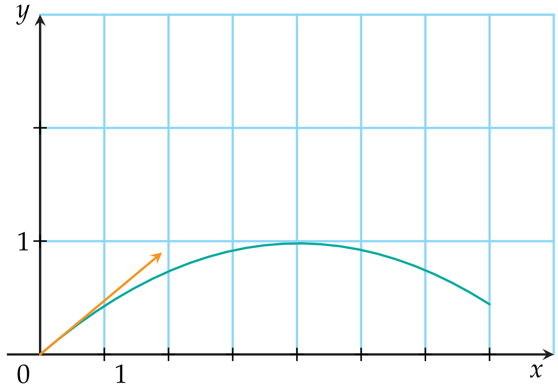
CALC

La portée d'un projectile correspond à la longueur entre la position d'où le projectile est lâché par le système lui donnant son impulsion, et la position du point de chute du projectile. La portée est donc la projection horizontale d'une trajectoire courbe.

À l'instant $t = 0$, l'objet est lancé depuis le sol et on note α l'angle initial du projectile avec l'horizontale $\left(\alpha \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$. On suppose que le projectile est lancé à la vitesse $v = 10$ m.s^{-1}. On néglige les frottements de l'air et on suppose que l'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

On peut montrer que la trajectoire du projectile est décrite par l'équation $y = \dfrac{-0{,}049}{\cos^2\alpha}x^2 + \dfrac{\sin\alpha}{\cos(\alpha)}x$ où x et y sont les coordonnées du projectile dans le repère choisi.

Exemple : Trajectoire pour $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$



1) Quelle est la nature de cette courbe ?

2) On note OP la distance obtenue quand le projectile retombe à terre.

a) Montrer que :
$$OP = \frac{1}{0{,}049} \times \cos\alpha \times \left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2(\alpha)}\right).$$

b) En déduire $OP = \dfrac{1}{0{,}049} \times \sin 2\alpha$.

c) Quel angle permet d'avoir une portée maximale ?

3) En fait, dans le cas général, on a :
$y = \dfrac{-1}{2a\cos^2\alpha}x^2 + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x + h$ où $a = \dfrac{v^2}{g}$.
Deux lanceurs du poids réalisent chacun un lancer dont les caractéristiques sont les suivantes :

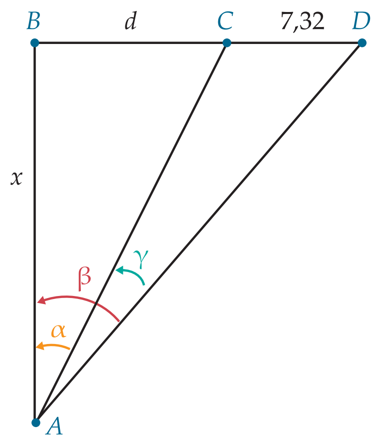
	α (deg)	v (m.s^{-1})	h (m)
Lanceur 1	43	13,7	2,62
Lanceur 2	41	13,8	2,45

À l'aide de la calculatrice, déterminer lequel a lancé le plus loin le poids.

Approfondir

65 **Angle de tir maximal** INFO

Lors d'un match de football, un joueur s'avance vers le but avec l'intention de tirer. Il est décalé de la distance $d = BC$ mètres latéralement par rapport au poteau de but le plus proche C et se trouve à x mètres du bord du terrain B sur la ligne de corner. La largeur des buts est la distance $CD = 7,32$ m.



On souhaite déterminer à quelle distance le joueur aura l'angle de tir $\gamma = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ le plus grand pour réussir son tir.

1) Conjecture

On fixe d = 10 m.

a) Avec un logiciel de géométrie, réaliser la figure. (On pourra créer le point A mobile sur la droite perpendiculaire à (CD) passant par B.)

b) Quelle est la valeur maximale pour γ ?

c) À quelle distance cela correspond-il pour le tireur ?

2) Cas général

a) Montrer que α s'exprime en fonction de x et d.

b) Application numérique avec $d = 5$ m.

c) Compléter la phrase suivante : « Dans l'intervalle $\left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right]$, quand γ augmente, $\cos\gamma$ .... ».

d) Réaliser une table de valeurs de la fonction qui à x associe le cosinus de l'angle γ pour $0 \leq x \leq 15$.

e) Donner une mesure de l'angle de tir maximal à 0,1 degré près.

3) Pour aller plus loin

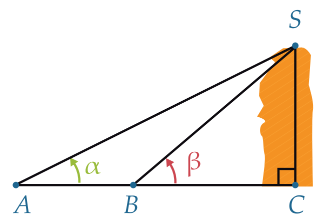
En considérant la fonction g définie par :

$$g(d) = \frac{x^2 + (d+7,32) \times d}{\sqrt{x^2 + (d+7,32)^2} \times \sqrt{d^2 + x^2}}$$

peut-on justifier que l'angle de tir diminue quand on s'écarte latéralement du but, c'est-à-dire quand d augmente, x restant fixe ?

66 **Prendre la tangente** CALC

Un navigateur passant devant le Cap Horn par temps calme décide de mesurer la hauteur SH de ce rocher.



On rappelle que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Le navigateur a mesuré les angles géométriques, puis α et β ainsi que la distance AB entre les deux points de mesure.

1) Expression de SH avec tan

a) Montrer que $SH = (AB + BH)\tan\alpha$.

b) En déduire que $SH = AB\dfrac{\tan\alpha \times \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$.

2) Expression de SH avec sin

a) Montrer que $\tan\beta - \tan\alpha = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

b) En conclure que $SH = AB\dfrac{\sin\alpha \times \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

3) Application numérique

En utilisant l'expression obtenue en **2) b)** calculer la hauteur SH avec les données suivantes :

$AB = 200$ m, $\alpha = 12,9°$, $\beta = 14,4°$.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Repérer un point sur le cercle trigonométrique
- Calculer une mesure d'un angle orienté
- Déterminer la mesure principale d'un angle orienté
- Résoudre une équation trigonométrique
- Calculer le cosinus et le sinus de nombres réels et d'angles orientés
- Utiliser les formules d'addition, de soustraction et de duplication

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$. Soit M le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \vec{v})$.

67 Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, -\vec{v})$ est :

(a) $-\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{7\pi}{6}$ (d) $\frac{-5\pi}{6}$

68 $(\vec{v}, \vec{u})$ a pour mesure :

(a) $-\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{13\pi}{6}$ (c) $-\frac{23\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$

69 Une mesure de l'angle orienté $(2\vec{u}, -2\vec{v})$ est :

(a) $-\frac{2\pi}{6}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{7\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

70 Une mesure de l'angle orienté $(-\vec{u}, -2\vec{v})$ a pour mesure :

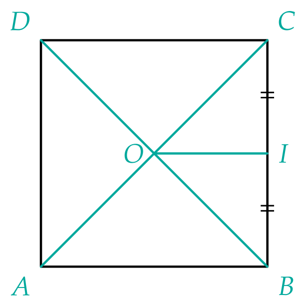
(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{13\pi}{3}$ (c) $-\frac{23\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{3}$

71 Une autre mesure de $\frac{\pi}{6}$ est :

(a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{25\pi}{6}$ (c) $-\frac{15\pi}{6}$ (d) $-\frac{13\pi}{6}$

72 Les coordonnées du point M telles que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \vec{v})$ sont :

(a) $\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$



$ABCD$ est un carré de centre O et I est le milieu de $[BC]$.

73 L'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC})$ a pour mesure :

ⓐ $\dfrac{\pi}{4}$ ⓒ $\dfrac{5\pi}{4}$

ⓑ $-\dfrac{\pi}{4}$ ⓓ $\dfrac{\pi}{2}$

74 L'angle orienté $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IC})$ a pour mesure :

ⓐ $\dfrac{\pi}{4}$ ⓑ $-\dfrac{\pi}{2}$ ⓒ $\dfrac{3\pi}{2}$ ⓓ π

75 L'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB})$ a pour mesure :

ⓐ $\dfrac{\pi}{2}$ ⓑ 0 ⓒ $\dfrac{3\pi}{2}$ ⓓ 2π

76 L'angle orienté $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OI})$ a pour mesure :

ⓐ $-\dfrac{3\pi}{2}$ ⓑ $\dfrac{3\pi}{4}$ ⓒ $\dfrac{3\pi}{2}$ ⓓ $-\dfrac{3\pi}{4}$

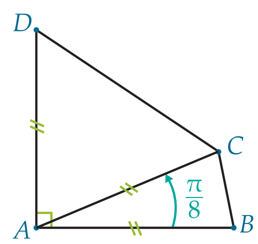
77 L'angle orienté $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA}\right)$ a pour mesure :

ⓐ $\dfrac{\pi}{4}$ ⓑ $-\dfrac{\pi}{4}$ ⓒ $\dfrac{5\pi}{4}$ ⓓ $-\dfrac{3\pi}{4}$

78 L'angle orienté $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AO}\right)$ a pour mesure :

ⓐ $\dfrac{\pi}{4}$ ⓑ $\dfrac{3\pi}{4}$ ⓒ $\dfrac{5\pi}{4}$ ⓓ $-\dfrac{3\pi}{4}$

$ABCD$ est le quadrilatère ci-contre.
$AB = AC = AD = 1$.



79 L'angle orienté $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure :

ⓐ $\dfrac{3\pi}{8}$ ⓒ $\dfrac{5\pi}{8}$

ⓑ $-\dfrac{3\pi}{8}$ ⓓ $-\dfrac{5\pi}{8}$

80 L'angle orienté $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ a pour mesure :

ⓐ $\dfrac{5\pi}{8}$ ⓑ $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}$ ⓒ $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{8}$ ⓓ $\dfrac{3\pi}{8}$

81 L'angle orienté $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$ a pour mesure :

ⓐ $\dfrac{5\pi}{16}$ ⓑ $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}$ ⓒ $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{8}$ ⓓ $\dfrac{3\pi}{8}$

82 L'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ a pour mesure :

(a) $\dfrac{7\pi}{16}$ (b) $-\dfrac{7\pi}{16}$ (c) $\dfrac{3\pi}{8}$ (d) $\dfrac{7\pi}{8}$

83 À quelle(s) expression(s) est égal $\cos\dfrac{\pi}{4}$?

(a) $2\cos\dfrac{\pi}{8}$ (b) $2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1$ (c) $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}$ (d) $1-2\cos^2\dfrac{\pi}{8}$

84 à quelle(s) expression(s) est égal $\sin\dfrac{\pi}{4}$?

(a) $2\sin\dfrac{\pi}{8}$ (b) $2\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$ (c) $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}$ (d) $2\cos\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}$

85 À quelle(s) expression(s) est égal $\cos\dfrac{\pi}{8}$?

(a) $\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{8}\right)$ (b) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ (c) $\sin\left(\dfrac{-\pi}{8}\right)$ (d) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$

86 L'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$:

(a) $x=\dfrac{\pi}{4}$ et $x=\dfrac{3\pi}{4}$ (b) $x=-\dfrac{\pi}{4}$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$ (c) $x=\dfrac{3\pi}{4}$ et $x=-\dfrac{3\pi}{4}$ (d) $x=-\dfrac{3\pi}{4}$ et $x=-\dfrac{\pi}{4}$

87 L'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions dans $\mathbb{R}$ ($k\in\mathbb{Z}$) :

(a) $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ (b) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\times 2\pi$ (c) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\times 2\pi$ et $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\times 2\pi$ (d) $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\times 2\pi$ et $x=-\dfrac{3\pi}{4}+k\times 2\pi$

88 L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$:

(a) $x=\dfrac{\pi}{6}$ et $x=\dfrac{11\pi}{6}$ (b) $x=\dfrac{\pi}{6}$ et $x=-\dfrac{\pi}{6}$ (c) $x=\dfrac{\pi}{3}$ et $x=-\dfrac{\pi}{3}$ (d) $x=\dfrac{\pi}{3}$ et $x=\dfrac{2\pi}{3}$

89 L'équation $\cos x = 0$ a pour solutions $S = \ldots$:

(a) $x=\dfrac{\pi}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$ (b) $x=-\dfrac{\pi}{2}$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$ (c) $x=\dfrac{\pi}{2}$ et $x=-\dfrac{\pi}{2}$ dans $[0\,;\,2\pi[$ (d) $x=\dfrac{\pi}{2}$ et $x=\dfrac{3\pi}{2}$ dans $[0\,;\,2\pi[$

90 L'inéquation $\sin x > 0$ a pour solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'intervalle :

(a) $]0\,;\,\pi]$ (b) $]-\pi\,;\,0]$ (c) $]0\,;\,\pi[$ (d) $]-\pi\,;\,0[$

91 L'inéquation $\cos x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions dans $[0\,;\,2\pi[$ l'ensemble $S = \ldots$:

(a) $\left]\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right[$ (b) $\left]-\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right[$ (c) $\left]\dfrac{5\pi}{6}\,;\,\dfrac{7\pi}{6}\right[$ (d) $\left]0\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right[\cup\left]\dfrac{7\pi}{6}\,;\,2\pi\right[$

92 L'inéquation $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'ensemble $S = \ldots$:

(a) $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ (b) $\left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right[$ (c) $\left]\dfrac{5\pi}{4}\,;\,\dfrac{7\pi}{4}\right[$ (d) $\left[-\dfrac{3\pi}{4}\,;\,-\dfrac{\pi}{4}\right]$

Travaux pratiques

TP 1 Les fonctions trigonométriques

INFO

1 Mobiliser ses connaissances sur le cosinus

Remplir le tableau de valeurs suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$									

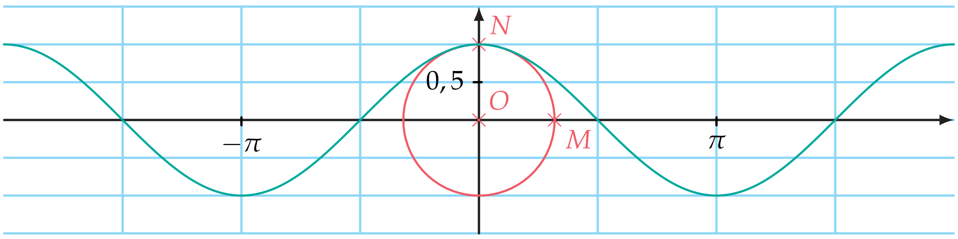
On peut définir une fonction qui à un nombre réel x, correspondant à un angle en radian, associe le cosinus de ce nombre réel.

2 Courbe représentative de la fonction cosinus

1) Se placer en mode radians (Options/Avancé/Radian) et régler sur l'axe des abscisses la distance entre nombres de la graduation à $\frac{\pi}{2}$.
Créer le cercle trigonométrique de centre O et passant par $I(1\ ;\ 0)$.
Créer le curseur α variant entre -2π et 2π.

2) Créer le point M de coordonnées $(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$. M est situé sur le cercle trigonométrique.
Créer le point N de coordonnées $(\alpha\ ;\ \cos\alpha)$.

3) Activer la trace du point N qui dépend du curseur α.
On visualise alors la courbe représentative C de la fonction $x \mapsto \cos x$, appelée fonction cosinus sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.



3 Étude de la fonction cosinus

1) Expliquer pourquoi on peut restreindre l'étude de cette fonction à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ et même à $[0\ ;\ \pi]$.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

On considère l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Tracer la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire les solutions de l'équation dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ puis dans l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

4 Pour aller plus loin

Reprendre la procédure précédente pour visualiser la courbe représentative C de la fonction $[0\ ;\ 2\pi]$, appelée fonction sinus sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

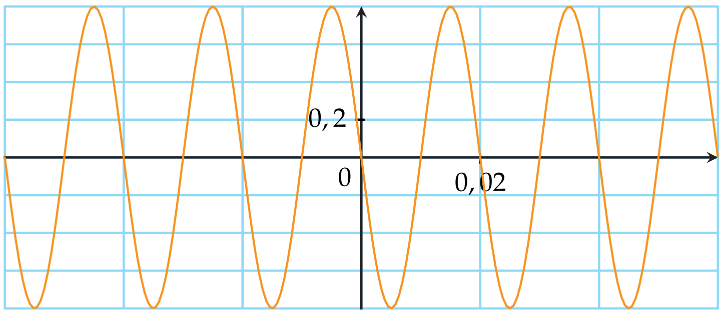
1) Dresser le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

2) Quelle translation permet d'obtenir la fonction sinus à partir de la fonction cosinus ?

3) Quelle formule du cours explicite cette translation ?

TP 2 Monte le son

Un microphone enregistre un signal sonore périodique qui est représenté sur l'écran d'un oscilloscope comme le montre la figure suivante. La courbe de la pression acoustique P, mesurée en Pascal (Pa), est représentée en fonction du temps.



1 Analyse du signal

1) Le signal enregistré est-il périodique ? Lire sa période T en seconde.
2) Calculer la fréquence f du signal (*rappel* : $f = \dfrac{1}{T}$).
3) Quelle est la valeur maximale prise par la fonction P ? On note ce nombre A.
4) Donner l'expression de P sous la forme $P(t) = A \times \cos(2\pi f t + \phi)$ où ϕ est le déphasage du signal.

2 Avec un logiciel de géométrie

On pose $\phi = \dfrac{n\pi}{10}$.

1) Créer un curseur appelé n entre -10 et 10 avec un pas de 1.
2) Entrer la fonction P dans la barre de saisie sous la forme obtenue en **1. 4)** : $P(t) = A \times \cos\left(2\pi f t + \dfrac{n\pi}{10}\right)$.
3) Pour quelle valeur de n obtient-on la courbe observée à l'oscilloscope ?
4) Calculer $P(0)$, puis $P(T)$.
5) Déterminer le signal acoustique $Q(t)$ qui permettrait de masquer le premier, c'est-à-dire tel que $P(t) + Q(t) = 0$.

3 Résolution algébrique

On souhaite savoir pour quels instants t la pression acoustique du signal $P(t)$ est supérieure à 0,3 Pa sur une période.

1) Résoudre l'équation $\cos x > \dfrac{1}{2}$ pour $x \in]-\pi\,;\,\pi]$.
2) En déduire les solutions de l'équation $A \times \cos(2\pi f t + \phi) > 0{,}3$ où A, f et ϕ sont les nombres obtenus à la **partie 2**.

Travaux pratiques

TP 3 Collision

INFO

Soit $(O\,;\ I,J)$ un repère orthonormé. L'unité est le mille nautique. 1 mn = 1 852 m.
Un point M est repéré dans le repère $(O\,;\ I,J)$ par ses coordonnées cartésiennes : son abscisse x et son ordonnée y. Les angles orientés permettent également de décrire la position d'un point dans le plan.
Un couple (r,α), formé par la distance $r = OM$ et α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$, constitue les coordonnées polaires du point M. Un employé de marine dont le bateau est au mouillage en O surveille au radar deux navires de pêche l'*Avel Diskan* (A) et le *Breizh Nevez* (B).

1 Radar et coordonnées polaires

1) Calculer les coordonnées cartésiennes des deux bateaux situés aux points A et B, définis respectivement par les coordonnées polaires $\left(3\,;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\left(4\,;\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2) Calculer la distance AB.

2 Trajectoire des deux bateaux

Un employé de marine dont le bateau est au mouillage en O surveille au radar deux navires de pêche l'*Avel Diskan* et le *Breizh Nevez* qui occupent successivement les positions A_n et B_n, $0 \leq n \leq 36$. Les deux bateaux se déplacent sur l'écran du radar suivant les coordonnées suivantes : $A_n\left(3 - \dfrac{n}{20}\,;\ \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{n\pi}{1\,000}\right)$ et $B_n\left(4 - \dfrac{n}{10}\,;\ \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{n\pi}{54}\right)$.

1) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, visualiser les positions successives des deux bateaux.

2) Écrire un algorithme qui donne l'alerte lorsque que A et B sont trop proches, à moins de trois encablures l'un de l'autre : $AB < 0,3$ mn.

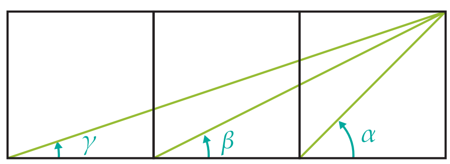
Récréation, énigmes

Trois à la suite

Les côtés des trois carrés adjacents suivants ont pour longueur 1.

1) Conjecturer avec un logiciel de géométrie une mesure de l'angle géométrique $\alpha + \beta + \gamma$.

2) Démontrer ce résultat (*piste* : utiliser les formules de duplication pour $\beta + \gamma$).

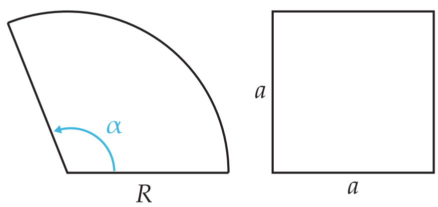


Carré d'angle

Déterminer le rayon R et l'angle α du secteur angulaire ci-contre pour qu'il ait même aire et même périmètre que le carré de côté a, dont la longueur a est donnée :

1) dans le cas où $R = a$;

2) dans le cas général.



GÉOMÉTRIE

3

Produit scalaire dans le plan

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Calculer la norme d'un vecteur
- Utiliser la relation de Chasles
- Savoir introduire un repère convenablement choisi
- Déterminer des angles orientés
- Connaître les valeurs remarquables du cosinus et du sinus
- Faire le lien entre équation de droite et vecteur directeur

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé. Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

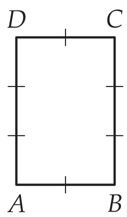
1) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$.

2) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$.

3) $\|-5\vec{u}\| = -5\,\|\vec{u}\|$

2 Exprimer les deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{RA}$, $\overrightarrow{RB}$ et $\overrightarrow{RC}$.

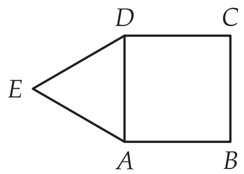
3 On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous tel que $AB = 2$, $AD = 3$.



1) Introduire un repère orthonormé conservant les distances de l'énoncé, c'est-à-dire dans lequel $AB = 2$ unités graphiques et $AD = 3$ unités graphiques.

2) Donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.

4 On considère la figure ci-dessous où $ABCD$ est un carré et ADE est équilatéral.



1) Donner une mesure en radians des angles orientés suivants.

a) $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$

b) $\left(\overrightarrow{DB}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)$

c) $\left(\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$

d) $\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{DE}\right)$

2) Donner $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$.

5 Donner un vecteur directeur de :

1) la droite d_1 d'équation $y = 2x + 3$

2) la droite d_2 d'équation $2x - 7y + 5 = 0$

3) la droite d_3 d'équation $x - 5 = 0$

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Une statue pour Évariste

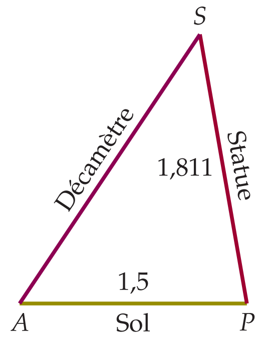
INFO

Partie 1 : Perpendicularité sans équerre

Dans la cour d'un lycée, on souhaite installer une statue du mathématicien Évariste Galois. Celle-ci mesure 1,811 m, en hommage à son année de naissance, 1811.

À cause de la forme de la statue, on ne peut pas utiliser d'équerre afin de l'ériger perpendiculairement au sol.

Sophie propose alors d'accrocher un décamètre (**gradué en mm**) au sommet S du crâne de « Galois » et de mesurer la distance entre ce point et un autre point A situé au sol, à 1,5 m du pied de la statue P, comme sur le graphique ci-dessous.



Un décamètre est un ruban gradué de 10 m de long.

Elle affirme qu'ensuite, le calcul de la quantité $p = AS^2 - AP^2 - PS^2$, où AS, AP et PS sont exprimées en mètre, lui permettra de répondre au problème posé.

1) a) Déterminer quelle doit être la valeur de p pour que la statue soit perpendiculaire au sol.

b) Quelle serait alors la mesure AS ?

2) Expliquer pourquoi il n'est pas possible d'obtenir une mesure de AS aussi précise avec le décamètre.

3) a) Lors d'un premier essai, Sophie a mesuré $p = -4,089721$.
En déduire AS puis, en bleu, représenter la situation à l'échelle $1/10$e sur une feuille de papier millimétré ou à petits carreaux.

b) Lors d'un deuxième essai, Sophie a mesuré $p = -2,289721$.
En déduire AS puis, en noir, représenter la situation sur le graphique précédent.

4) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et régler le nombre de décimales à 10.

- Créer deux points $A(0\,;\,0)$ et $P(1{,}5\,;\,0)$.
- Créer un cercle de centre P et de rayon 1,811.
- Créer un curseur b variant de 1,8 à 3 avec un pas de 0,001 puis créer le cercle de centre A et de rayon b.
- Créer S le point d'intersection des deux cercles, d'ordonnée positive.
- Créer le nombre p défini par $p = b^2 - 1{,}5^2 - 1{,}811^2$.
- Faire varier b de sorte que la « statue » soit « la plus perpendiculaire au sol possible ».

5) Recopier et compléter.
Plus p est proche de . . . ., plus la statue semble . . . .

6) En déduire la valeur de AS que doit mesurer Sophie sur le décamètre (dont la précision est le mm) pour avoir une statue la plus stable possible. Combien vaudra alors p ?

Partie 2 : Avec des vecteurs

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on définit leur produit scalaire, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

1) Tracer un vecteur $\vec{u}$ d'origine A et d'extrémité B puis un vecteur $\vec{v}$ d'origine B et d'extrémité C.

2) Exprimer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de AB, AC et BC.

3) **a)** Comment définiriez-vous des vecteurs orthogonaux (on pourra penser aux repères orthogonaux) ?

b) En vous inspirant de la partie précédente, expliquer pourquoi on dit que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ mesure le défaut d'orthogonalité entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

DÉBAT 2 Un problème de définition

Annie et Haohan ne sont pas d'accord !
Le professeur d'Annie a défini le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan par la formule :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

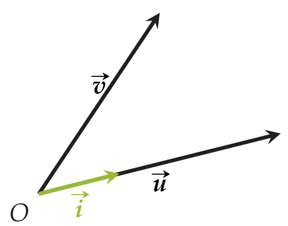
En revanche, le professeur d'Haohan affirme que le produit scalaire est défini de la façon suivante :
Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Annie et Haohan sont-ils réconciliables ?

ACTIVITÉ 3 Because sinus

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on a tracé des représentants ci-dessous à partir d'un point O.



1) Soit $\vec{\imath}$, le vecteur de norme 1, colinéaire et de même sens que $\vec{u}$ ci-contre. Exprimer $\vec{\imath}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\|\vec{u}\|$.

2) On introduit alors un vecteur $\vec{\jmath}$ tel que le repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ soit orthonormé direct. Reproduire la figure et y placer $\vec{\jmath}$.

3) Donner les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\left(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

4) **a)** Tracer le cercle trigonométrique associé au repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

b) Caractériser le vecteur $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ en termes de direction et de norme puis tracer son représentant d'origine O.

c) En déduire les coordonnées de $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ puis celles de $\vec{v}$ dans $\left(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

5) En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

Cours - Méthodes

Dans tout ce chapitre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent des vecteurs du plan.

1. Définition du produit scalaire et orthogonalité

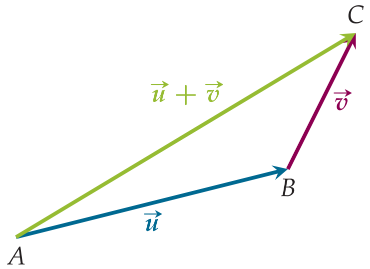
DÉFINITION

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »), est défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right).$$

Remarques :

- Concrètement, cela correspond à la moitié de l'écart relatif entre AC^2 et AB^2+BC^2 sur le graphique ci-dessous.



- Le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais **un nombre réel**.

Exemple Soit ABC un triangle tel que $AB=6$, $AC=5$ et $BC=8$. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Correction

On a $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(BC^2-BA^2-AC^2\right)=\frac{1}{2}\left(8^2-6^2-5^2\right)=\frac{3}{2}.$

PROPRIÉTÉ

1) Le produit scalaire est **commutatif**, c'est-à-dire que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.
2) Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
3) $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est également noté $\vec{u}^2$, appelé « **carré scalaire** de $\vec{u}$ ».
On a alors $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.

PREUVE

1) On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\vec{v}+\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2\right)=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

2) Si $\vec{u}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{0}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{0}\right\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\vec{v}\|^2-0^2-\|\vec{v}\|^2\right)=0$.
Il en va de même si $\vec{v}=\vec{0}$.

3) $\vec{u}^2=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{u}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{u}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|2\vec{u}\|^2-2\|\vec{u}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left((|2|\,\|\vec{u}\|)^2-2\|\vec{u}\|^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(4\|\vec{u}\|^2-2\|\vec{u}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(2\|\vec{u}\|^2\right)=\|\vec{u}\|^2.$

DÉFINITION

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, ce que l'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

REMARQUE : Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur du plan.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ (2π).

REMARQUES :

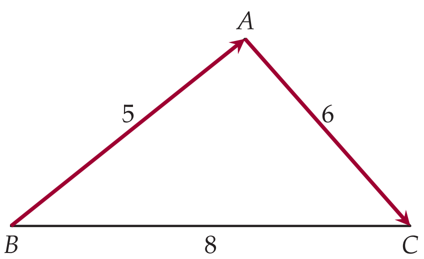
- Concrètement, cela veut dire que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux quand ils « forment un angle droit ».
- Pour $k \neq 0$, on sait que $(\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$ ou $-(\vec{u}; \vec{v})$ (2π) donc si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

PREUVE Soit A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ comme sur le graphique de la première remarque.
On a alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ainsi :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right)$.
Il en résulte que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right) = 0$
$\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en B autrement dit $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ (2π).

Exemple Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

Correction

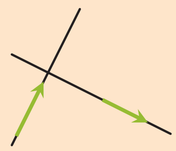
D'après l'exemple précédent, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2} \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux.
Cela veut dire que, sur la figure ci-contre, les droites (BA) et (AC) ne sont pas perpendiculaires donc que ABC n'est pas rectangle en A.



REMARQUE : Pour deux vecteurs de norme fixée, on dit que le produit scalaire est une mesure du **défaut d'orthogonalité** de ces deux vecteurs : plus il est proche de 0, plus l'angle formé par ces deux vecteurs « semble droit ».

PROPRIÉTÉ : Corollaire

Deux droites du plan sont perpendiculaires si, et seulement si, un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.



2. Produit scalaire et coordonnées

Dans ce paragraphe, toutes les coordonnées sont données dans un repère **orthonormé** du plan.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

PREUVE Remarquons préalablement que $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}^2 - \sqrt{x^2+y^2}^2 - \sqrt{x'^2+y'^2}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(x+x'\right)^2 + \left(y+y'\right)^2 - \left(x^2+y^2\right) - \left(x'^2+y'^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2-x^2-y^2-x'^2-y'^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right) = \frac{1}{2} \times 2(xx'+yy') = xx'+yy'.
\end{aligned}$$

REMARQUE : Cette formule n'est valable **que dans un repère orthonormé**.

MÉTHODE 1 Étudier la perpendicularité de deux droites

► Ex. 19 p. 229

Exercice d'application

Soit quatre points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(5\ ;\ 0)$, $C(3\ ;\ 4)$ et $D(6\ ;\ 13)$ dans un repère orthonormé.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 6 \times 3 + (-2) \times 9 = 18 - 18 = 0.$$

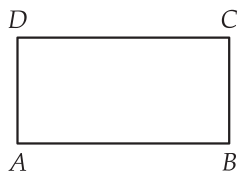
On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, vecteurs directeurs des deux droites, sont orthogonaux donc que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

MÉTHODE 2 Introduire un repère orthonormé pour calculer un produit scalaire

► Ex. 13 p. 228

Exercice d'application

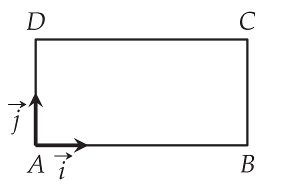
On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AC = 2$.



Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction

On introduit $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ de sorte que le repère $\left(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$ soit orthonormé et respecte les longueurs données par l'énoncé.



On a alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 4 + 0 \times 2 = 16.$$

3. Propriétés algébriques

La formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ permet de démontrer facilement les propriétés algébriques suivantes.

PROPRIÉTÉ

- Le produit scalaire est **distributif** par rapport à l'addition : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.
  En particulier $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}$.

PREUVE

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.

  On a alors $\vec{v} + \vec{w}\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$ puis :

  $$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy'' = xx' + yy' + xx'' + yy'' \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$
- Voir exercice **30** page 230.

REMARQUES :

- Le produit scalaire est également distributif par rapport à la soustraction puisque :
  $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} + (-\vec{w})) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot (-\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + (-\vec{u} \cdot \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Plus largement, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{z} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$.

Exemple Soit A, B, C et D quatre points du plan. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Correction

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ d'après la relation de Chasles.

PROPRIÉTÉ : Identités remarquables

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

PREUVE Démontrons le premier point :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \text{ par distributivité} \\ &= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \text{ par commutativité} \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

THÉORÈME : Application : Théorème de la médiane

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.

Pour tout M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

PREUVE On se référera au **TP 3** page 243.

4. Autres expressions du produit scalaire

PROPRIÉTÉ

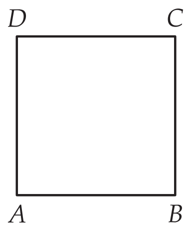
Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C distincts du plan :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Remarque : Pour la preuve de cette propriété, on se référera à **l'Activité 3** page 219.

Exemple

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 3.



Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction

On exprime d'abord ce produit scalaire en fonction de représentants des vecteurs de même origine A.

En effet, on sait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, il en résulte donc que :

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \times AC \times \cos\left(\widehat{DAC}\right)$.

Comme, de plus, $AD = 3$, $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $\cos\left(\widehat{DAC}\right) = \cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on en déduit que :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}^2}{2} = 9.$$

MÉTHODE 3 Déterminer un angle avec le produit scalaire ► Ex. 44 p. 231

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé, on considère $A(0\,;\,0)$, $B(5\,;\,1)$ et $C(2\,;\,4)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC.

2) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
On donnera le résultat en degrés, arrondi à 0,1 près.

Correction

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + 1 \times 4 = 14$
- $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
- $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2) De $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$, on déduit que

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{14}{\sqrt{26} \times 2\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{130}}.$$

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 52,1°$.

Remarque : Plus généralement, le produit scalaire et la relation de Chasles permettent de montrer le **théorème d'Al-Kashi** qui donne des relations entre les longueurs des côtés et les mesures des angles d'un triangle (voir **TP 4** page 244).

PROPRIÉTÉ

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés.

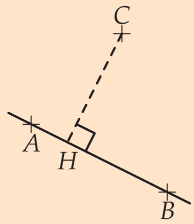
PREUVE

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos(0) = 1$ donc :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times 1 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés, alors $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos(\pi) = -1$ donc :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times (-1) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

DÉFINITION

Dans le plan, on considère une droite (AB) et un point C extérieur à cette droite.

H le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB) est l'intersection de (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C.



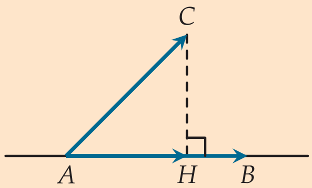
PROPRIÉTÉ

Soit A, B et C trois points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

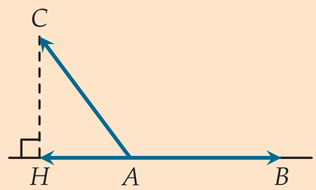
Plus précisément, si $H \neq A$, il y a deux configurations possibles :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés :

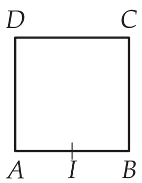


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$

PREUVE D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ donc :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$
puisque, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ étant orthogonaux par définition de H, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

Exemple

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 2 et I le milieu de $[AB]$.



Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI}$

Correction

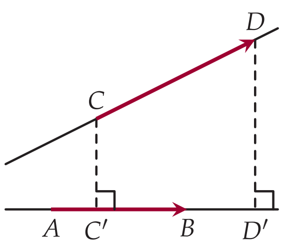
- B est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 2^2 = 4.$$

- $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$ et B est le projeté orthogonal de C sur (IA) donc :

$$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA \times IB = -1^2 = -1.$$

REMARQUE :
Soit C et D deux points distincts, extérieurs à une droite (AB).
On peut montrer (voir exercice 51 page 232) que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$, où C' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).

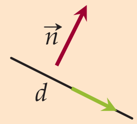


Cours - Méthodes

5. Vecteur normal à une droite

DÉFINITION

Dans le plan, on dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à une droite d s'il est orthogonal à un vecteur directeur de d.
$\vec{n}$ est alors orthogonal à tout vecteur directeur de d.



PROPRIÉTÉ

On se place dans un repère orthonormé du plan et on considère deux réels a et b non tous les deux nuls.

- La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.
- Réciproquement, une droite admettant $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal a pour équation $ax + by + c = 0$ (où c est à déterminer).

PREUVE

- Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et d d'équation $ax + by + c = 0$. On sait que d admet $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur or $\vec{u} \cdot \vec{n} = -b \times a + a \times b = -ba + ab = 0$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$, vecteur directeur de d : $\vec{n}$ est un vecteur normal à d.
- Soit une droite d admettant $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal et $A(x_A ; y_A)$ un point de d.
  Un point $M(x;y)$ appartient à d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
  Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M \in d \Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b = 0$
  $\Leftrightarrow ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$: la droite d a bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple

Donner un vecteur normal à la droite d d'équation $2x - 3y + 5 = 0$ dans un repère orthonormé.

Correction

$2x - 3y + 5 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 2$ et $b = -3$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à d.

MÉTHODE 4 Trouver une équation de droite avec un vecteur normal

► Ex. 65 p. 234

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(2\,;\,-4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Correction Il y a deux façons de procéder.

- Comme $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal à d, elle a pour équation $5x + 6y + c = 0$ où c reste à déterminer.
  De plus, $A \in d$ donc $5x_A + 6y_A + c = 0 \Leftrightarrow 5 \times 2 + 6 \times (-4) + c = 0 \Leftrightarrow -14 + c = 0$
  $\Leftrightarrow c = 14$: la droite d a donc pour équation $5x + 6y + 14 = 0$.
- $M(x\,;\,y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-2) \times 5 + (y+4) \times 6 = 0 \Leftrightarrow 5x + 6y + 14 = 0$.

6. Applications du produit scalaire

PROPRIÉTÉ : Équation de cercle

Dans un repère orthonormé du plan :
- le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon r a pour équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$;
- le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

PREUVE
- $M(x;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$ (puisque ΩM et r sont positifs)
  $\Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$.
- $M \in \mathscr{C}' \Leftrightarrow ABM$ est rectangle en M ou $M = A$ ou $M = B \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

MÉTHODE 5 Trouver une équation de cercle de diamètre donné

► Ex. 73 p. 235

Exercice d'application

Soit $A(2\,;\,3)$ et $B(5\,;\,-1)$ dans un repère orthonormé.
Déterminer une équation de $\mathscr{C}$, le cercle de diamètre $[AB]$.

Correction

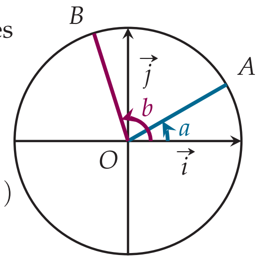
$M(x\,;\,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ or $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 2-x \\ 3-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 5-x \\ -1-y \end{pmatrix}$ donc :

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow (2-x)(5-x) + (3-y)(-1-y) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2x - 5x + x^2 + (-3 - 3y + y + y^2) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 7x + y^2 - 2y + 7 = 0$ qui est donc une équation de $\mathscr{C}$.

PROPRIÉTÉ : Formule d'addition du cosinus et du sinus

Soit a et b deux réels.
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

PREUVE Sur le cercle trigonométrique muni du repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on place deux points A et B de sorte que $\left(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{OA}\right) = a\ (2\pi)$ et $\left(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{OB}\right) = b\ (2\pi)$.



- On a $\left(\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OB}\,;\,\vec{\imath}\right) + \left(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{OA}\right)$ par la relation de Chasles puis $\left(\overrightarrow{OB}\,;\,\vec{\imath}\right) + \left(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{OA}\right) = -\left(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{OB}\right) + \left(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{OA}\right)$
  $= -b + a = a - b\ (2\pi)$.
  Ainsi, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right) = \cos(a-b)$.
- D'autre part, par définition du sinus et du cosinus, on a $A(\cos(a);\sin(a))$ et $B(\cos(b);\sin(b))$ donc $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)$.

Il en résulte que $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
Les autres formules se déduisent de la précédente (voir exercice 95 page 238).

Exemple Justifier que $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$ puis calculer $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Correction

On a $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{12} - \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{12}$ donc :

$\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

S'entraîner

Dans tous les exercices, les coordonnées sont données dans un repère orthonormé du plan.

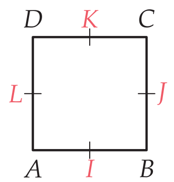
Activités mentales

1 Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec :

1) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 10$
2) $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{5}$ et $\vec{v} = \vec{u}$
3) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$
4) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = \dfrac{3\pi}{4}$ (2π)
5) $\|\vec{u}\| = 8$ et $\vec{v} = -2\vec{u}$

2

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 1 et I, J, K et L les milieux des côtés.



Associer chacun des produits scalaires avec le calcul ou le résultat auquel il est égal.

- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BL}$
- $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID}$
- $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{KL}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LK}$

- $AB \times AI$
- $-IB \times IA$
- $BC \times BJ$
- 0

3 Donner un vecteur normal aux droites suivantes :

1) d_1 d'équation $65x - 12y + 6 = 0$
2) d_2 d'équation $y = 3x - 2$
3) d_3 d'équation $-8x = -y + 2$
4) (AB) avec $A(4\,;\,3)$ et $B(6\,;\,12)$

4 d, d'équation $2x - 8y + 28 = 0$ est-elle la droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et passant par $T(14\,;\,7)$?

5 Donner le rayon et les coordonnées du centre du cercle :

1) $\mathscr{C}_1$ d'équation $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$
2) $\mathscr{C}_2$ d'équation $(x+3)^2 + (y-7)^2 = 5$

6 Les droites suivantes sont-elles perpendiculaires ?

1) (AB) et (CD) avec $A(1\,;\,-3)$, $B(-1\,;\,5)$, $C(-8\,;\,3)$ et $D(7\,;\,7)$.
2) (EF) et d_1 d'équation $x + 2y - 7 = 0$ avec $E(1\,;\,7)$ et $F(3\,;\,11)$.
3) d_2 et d_3 d'équation respective $4x - 8y - 11 = 0$ et $-2x - y = 5$.

Définition et coordonnées

7 On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 3\,\text{cm}$, $AC = 5\,\text{cm}$ et $BC = 6\,\text{cm}$.

1) Faire une figure.
2) Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de AB, BC et AC.
3) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

8 On considère trois points E, F et G du plan tels que $EF = 8$, $EG = 6$ et $FG = 11$. Calculer :

1) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG}$ 2) $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{GE}$ 3) $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{FE}$

9 On considère les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\|\vec{a}\|$, $\left\|\vec{b}\right\|$ et $\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\|$.
2) En déduire $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

10 Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$
2) $\vec{s} \cdot \vec{t}$ avec $\vec{s}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
3) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ avec $\vec{a}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4) $\vec{c} \cdot \overrightarrow{UV}$ avec $\vec{c}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$, $U(\sqrt{24}+5\,;\,1)$ et $V(5\,;\,\sqrt{2})$
5) $\vec{r} \cdot \overrightarrow{AB}$ avec $\vec{r}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $A(-1\,;\,2)$ et $B(-3\,;\,6)$
6) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MR}$ avec $C(5\,;\,6)$, $D(-1\,;\,4)$, $M(3\,;\,7)$ et $R(8\,;\,9)$
7) $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{EF}$ avec $E(0\,;\,1)$, $F(3\,;\,0)$, $S(8\,;\,8)$ et $T(5\,;\,5)$

11 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Calculer :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 2) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v}$ 3) $(-\vec{u}) \cdot (3\vec{v})$

12 ALGO

Écrire un algorithme :

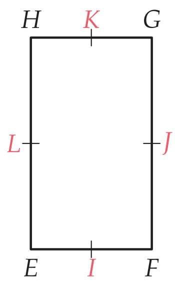
- demandant à l'utilisateur de saisir les coordonnées de deux vecteurs dans un repère orthonormé ;
- donnant, en sortie, le produit scalaire de ces deux vecteurs.

13 ► MÉTHODE 2 p. 222

Reprendre la figure de l'exercice **2** page 228.

1) Choisir un repère orthonormé adapté et donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.
2) En déduire :
 a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$ b) $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{JD}$ c) $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{DL}$ d) $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{JA}$

14 On considère le rectangle $EFGH$ ci-dessous, tel que $EF = 4$ et $EH = 7$, et les points I, J, K et L, milieux respectifs des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[EH]$.



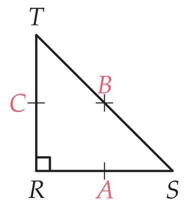
1) Reproduire la figure.

2) En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

a) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH}$ **c)** $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GH}$ **e)** $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IG}$

b) $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{EG}$ **d)** $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EK}$ **f)** $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{JK}$

15 On considère le triangle isocèle et rectangle RST ci-dessous, tel que $RS = RT = 4$, et les points A, B et C, milieux respectifs des côtés $[RS]$, $[ST]$ et $[RT]$.



En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

1) $\overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{AC}$ **2)** $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{RS}$ **3)** $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{SA}$ **4)** $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CB}$

16 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ y \end{pmatrix}$ avec x et y réels.

1) Déterminer x tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$.

2) Déterminer y tel que $\vec{u} \cdot \vec{w} = \sqrt{12}$.

17 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ avec x réel.

Déterminer, si elle(s) existe(nt), pour quelle(s) valeur(s) de x, on a :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -9$ **3)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -10$ **4)** $\vec{u} \cdot \vec{v} > 7$

18 D'après le cours, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

La réciproque de cette propriété est-elle vraie ? Justifier.

Orthogonalité

19 ► MÉTHODE 1 p. 222

On considère les points $A(1\,;\,3)$, $B(3\,;\,1)$, $C(-2\,;\,-2)$, $D(13\,;\,-5)$ et $E(4\,;\,3)$.

1) Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?

2) Même question pour :

a) (AC) et (BD)

b) (BE) et (CD)

20 On considère quatre points $J(6\,;\,1)$, $K(2\,;\,4)$, $L(1\,;\,-5)$ et $M\left(-\dfrac{5}{2}\,;\,-2\right)$.

1) Le triangle JKL est-il rectangle en J ?

2) Le triangle JKM est-il rectangle ?

21 On considère trois points $A(\sqrt{6}\,;\,\sqrt{7})$, $B(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3})$, $C(-\sqrt{6}\,;\,\sqrt{7}+2\sqrt{3})$.

Montrer que ABC est rectangle en B.

22 On considère quatre points $Q(2\,;\,-2)$, $R(1\,;\,1)$, $S(4\,;\,2)$ et $T(5\,;\,-1)$.

Déterminer la nature du quadrilatère $QRST$.

23 On considère trois points $A(5{,}2\,;\,4)$, $B(6\,;\,3{,}1)$ et $C(1\,;\,y)$.

Déterminer y tel que ABC soit rectangle en A.

24 On considère quatre points $A(0\,;\,0)$, $B(6\,;\,2)$, $C(-1{,}5\,;\,4{,}5)$ et $D\left(2{,}5\,;\,\dfrac{35}{6}\right)$.

Montrer que $ABCD$ est un trapèze rectangle puis calculer son aire.

25 On considère deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées, d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

1) Donner un vecteur directeur de chacune des deux droites.

2) En déduire la propriété suivante :

Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

3) Parmi les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $y = 2x + 3$, $y = -2x + 5$ et $y = -\dfrac{1}{2}x - 6$, lesquelles sont perpendiculaires ?

S'entraîner

26 Associer chacune des égalités vectorielles suivantes :
- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
- $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où k décrit $\mathbb{R}_+$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

à l'ensemble des points M qui lui correspond :
- la demi-droite $[AB)$
- la hauteur issue de C dans ABC
- le cercle de diamètre $[AB]$
- la perpendiculaire à $[BC]$ passant par A

27 Déterminer, si possible, la ou les valeurs de m pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ m \end{pmatrix}$

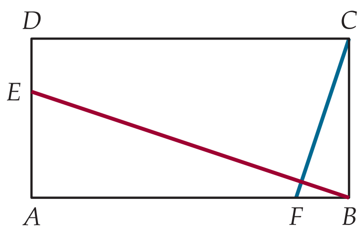
2) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2m \\ 6 \end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix} m^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ m-4 \end{pmatrix}$

4) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ m^2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ m \end{pmatrix}$

5) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ m \end{pmatrix}$

28 On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous tel que $AB = 6$ et $AD = 3$, $E \in [AD]$ avec $AE = 2$ et $F \in [AB]$ avec $AF = 5$.



Montrer que les droites (FC) et (BE) sont perpendiculaires.

29 ALGO

Écrire un algorithme :
- demandant à l'utilisateur de saisir les coordonnées de quatre points A, B, C et D ;
- affichant en sortie si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ou si elles ne le sont pas.

Propriétés algébriques

30 **Démonstration d'une propriété algébrique**

Prérequis. On supposera connue la propriété suivante.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Question. Montrer que, pour tous réels k et k', et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

$$(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

31 On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 2$, $AC = 6$ et $BC = 7$.

1) a) Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$.

b) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En utilisant la méthode précédente, calculer :

a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$

32 On considère trois points M, N et O du plan tels que $MN = 27$, $MO = 36$ et $NO = 45$.

Calculer :

1) $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MN}$ 2) $\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{NM}$ 3) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$

33 Développer puis exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

1) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (5\vec{u} + 4\vec{v})$

2) $(5\vec{u} - 4\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

3) $(-3\vec{u} + 6\vec{v}) \cdot (-\vec{u} - 5\vec{v})$

4) $(-\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 6\vec{v})$

34 Développer puis exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $\vec{r} \cdot \vec{s}$, $\|\vec{r}\|$ et $\|\vec{s}\|$.

1) $\left(\frac{1}{3}\vec{r} + \vec{s}\right) \cdot (6\vec{r} - 9\vec{s})$

2) $\left(-\sqrt{7}\vec{r} + \sqrt{2}\vec{s}\right) \cdot \left(\sqrt{7}\vec{r} + \sqrt{2}\vec{s}\right)$

3) $\left(\left(1 + \sqrt{3}\right)\vec{r} + 5\vec{s}\right) \cdot (\vec{r} + \vec{s})$

35 On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 2$.

1) a) Calculer $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u} + 3\vec{v})$.

b) En déduire $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$.

2) En utilisant la méthode précédente, calculer :

a) $\|8\vec{u} + 5\vec{v}\|$ b) $\|-6\vec{u} - 2\vec{v}\|$

36 En reprenant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exercice précédent, calculer :

1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2$

2) $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|^2 + \|4\vec{u} + 5\vec{v}\|^2$

37 On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$.

1) Existe-t-il un ou des réels t tels que $\|\vec{u} + t\vec{v}\| = 2$? Si oui, le ou les déterminer.
2) Existe-t-il un ou des réels t tels que $\|\vec{u} + t\vec{v}\| = 1$? Si oui, le ou les déterminer.
3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \|\vec{u} + t\vec{v}\|^2$.
   b) En déduire la plus petite valeur possible de $\|\vec{u} + t\vec{v}\|$.

38 On sait que cinq points du plan A, B, C, D et E vérifient :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 2$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} = -4$

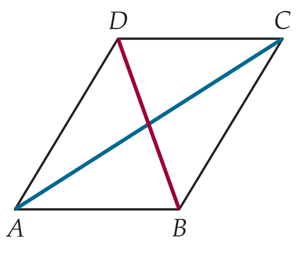
Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

39 On considère quatre points A, B, C et D du plan.

1) À l'aide d'une identité remarquable, montrer que :
   - $AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right)$
   - $CD^2 - DA^2 = \overrightarrow{CA} \cdot \left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}\right)$
2) En déduire $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.
3) a) En utilisant la propriété précédente, montrer que les cerf-volant ont des diagonales perpendiculaires.
   b) La réciproque est-elle vraie, autrement dit, un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires est-il nécessairement un cerf-volant ?

40 **Identité de polarisation**

1) Démontrer l'identité de polarisation :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$
2) On considère un parallélogramme $ABCD$ dont les diagonales ont pour longueur $AC = 7$ et $BD = 4$.



   a) En utilisant l'identité de polarisation démontrée à la question précédente, justifier que :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\left(AC^2 - \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right\|^2\right).$$
   b) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Produit scalaire et angles

41 Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec :

1) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0{,}1$
2) $\|\vec{u}\| = 23$, $\|\vec{v}\| = 11$ et $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0{,}93$
3) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 8$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$
4) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{5\pi}{3}\ (2\pi)$
5) $\|\vec{u}\| = 12$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$
6) $\|\vec{u}\| = 9$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u} = -1{,}5\vec{v}$

42 Calculer $\vec{a} \cdot \vec{b}$ avec :

1) $\|\vec{a}\| = \frac{5}{6}$, $\left\|\vec{b}\right\| = \frac{\sqrt{3}}{8}$ et $\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = -\frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$
2) $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}$, $\left\|\vec{b}\right\| = 6$ et $\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$
3) $\|\vec{a}\| = 2\sqrt{2}$, $\left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{8}$ et $\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \pi\ (2\pi)$
4) $\|\vec{a}\| = \sqrt{2} + 1$ et $\vec{b} = \sqrt{3}\vec{a}$

43 On considère un triangle ABC avec $AB = 5$ et $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

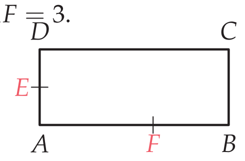
1) Faire une figure.
2) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
   On remarquera d'abord que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

44 ► MÉTHODE 3 p. 224

On considère trois points $R(-1\ ;\ -2)$, $S(5\ ;\ -4)$ et $T(3\ ;\ 6)$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT}$, RS et RT.
   b) En déduire $\cos\left(\widehat{SRT}\right)$ puis une mesure de $\widehat{SRT}$, arrondie à 0,01 degré près.
2) Déterminer de même une mesure de $\widehat{RST}$.
3) En déduire $\widehat{STR}$.

45 On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous, tel que $AB = 5$ et $AD = 2$, E est le milieu de $[AD]$ et $F \in [AB]$ avec $AF = 3$.



En se plaçant dans un repère orthonormé adapté et à l'aide du produit scalaire, déterminer, à 0,01° près :

1) $\widehat{BAC}$ 2) $\widehat{DFB}$ 3) $\widehat{DFC}$ 4) $\widehat{CEF}$

46 On considère un triangle OMN tel que $OM = 5$, $ON = 8$ et $\widehat{MON} = \frac{\pi}{4}$ radians.

Déterminer MN (on pourra d'abord calculer $\overrightarrow{MN}^2$ en utilisant la relation de Chasles).

47 On considère trois points I, J et K du plan tels que $IJ = 4$, $IK = 5$ et $JK = 8$.

1) Faire une figure.

2) Montrer que $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{IJ}$.

3) En déduire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$.

4) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{JIK}$, arrondi à 0,1 près.

48 On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 7$, $BC = 8$ et $AC = 12$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire une mesure de $\widehat{A}$, arrondi à 0,1 près.

2) Déterminer $\widehat{B}$ puis $\widehat{C}$.

49 **Une autre formule de la médiane**

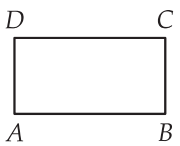
On considère un triangle ABC et I le milieu de $[AB]$.

1) Montrer que $CA^2 - CB^2 = 2\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2) En déduire que $|CA^2 - CB^2| = 2IH \times AB$ où H est le pied de la hauteur issue de C dans ABC.

3) Redémontrer la propriété connue :
« si ABC est isocèle en C, alors le pied de la hauteur issue de C est le milieu de $[AB]$ ».

50 On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous tel que $AB = 4$ et $AD = 2$.



1) On cherche à déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 8$.

a) Montrer qu'un point M appartient à $\mathscr{E}_1$ si, et seulement si, M', son projeté orthogonal sur (AB), vérifie $AB \times AM' = 8$ et $M' \in [AB)$.

b) En déduire M' puis $\mathscr{E}_1$.

2) On cherche à déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DM} = -2$.

a) Montrer qu'un point M appartient à $\mathscr{E}_2$ si, et seulement si, M', son projeté orthogonal sur (BC), vérifie $BC \times CM' = 2$ et $M' \in [CB)$.

b) En déduire M' puis $\mathscr{E}_2$.

3) Reproduire le rectangle de l'énoncé puis tracer, après l'avoir déterminé :

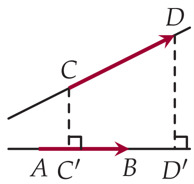
a) en rouge, l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} = 16$;

b) en bleu, l'ensemble $\mathscr{E}_4$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$.

Produit scalaire et projection

51 **Projection de deux points sur une droite**

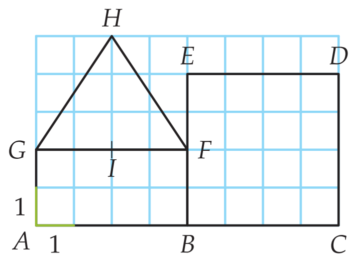
Soit C et D deux points distincts, extérieurs à une droite (AB) et C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).



1) Montrer l'égalité vectorielle :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D}.$$

2) En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

Dans les exercices **52** à **54**, on se réfère à la figure suivante :



52 En utilisant des projections, calculer les produits scalaires suivants (on reproduira la figure et on pourra introduire de nouveaux points) :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$	**3)** $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA}$	**5)** $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{BC}$
2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI}$	**4)** $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FH}$	**6)** $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{FD}$

53 **Décomposition de vecteurs**

1) a) Montrer que $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FH} = \left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}\right) \cdot \left(\overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IH}\right)$.

b) En déduire $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FH}$.

2) En décomposant les deux vecteurs de la même manière qu'à la question précédente, calculer :

a) $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF}$. **b)** $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{EI}$.

54 En utilisant le produit scalaire, calculer les mesures des angles suivants, on donnera le résultat en degrés arrondi à 0,1 près.

1) $\widehat{AFB}$ **2)** $\widehat{IFD}$ **3)** $\widehat{HFG}$

55 On considère trois points $A(-1\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 2)$ et $C(0\ ;\ 7)$ et B', le pied de la hauteur issue de B dans ABC.

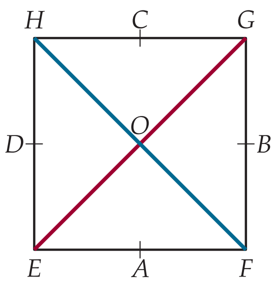
1) Exprimer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ en fonction de CB'.

2) En déduire CB' puis BB'.

3) Calculer l'aire de ABC.

Choisir la bonne formule

56 On considère le carré $EFGH$ de côté a ci-dessous.

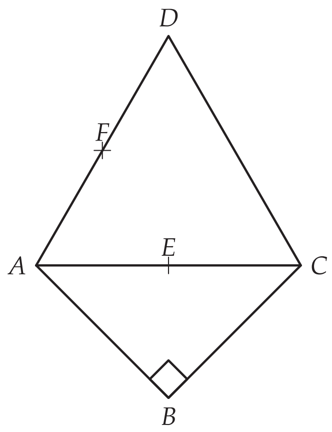


Dans ce carré, A est le milieu de $[EF]$, B le milieu de $[FG]$, C le milieu de $[GH]$, D le milieu de $[HE]$ et O est le centre de $EFGH$.

En utilisant la méthode de votre choix, exprimer les produits scalaires suivants en fonction de a :

1) $\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HF}$ **4)** $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{FE}$ **7)** $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}$
2) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}$ **5)** $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{FH}$ **8)** $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CO}$
3) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{GE}$ **6)** $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}$ **9)** $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EG}$

57 On considère le triangle équilatéral ADC de côté 2 et le triangle ABC, isocèle et rectangle en B ci-dessous.

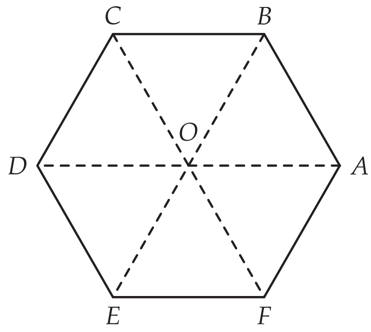


Dans cette figure, E est le milieu de $[AC]$ et F celui de $[AD]$.

En utilisant la méthode de votre choix, calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ **4)** $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}$ **7)** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CF}$
2) $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{CA}$ **5)** $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}$ **8)** $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$
3) $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EA}$ **6)** $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}$ **9)** $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{ED}$

58 On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O et de côté 1 ci-dessous.



En utilisant la méthode de votre choix, calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{FO}$ **4)** $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{FA}$ **7)** $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{DF}$
2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ **5)** $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OD}$ **8)** $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CA}$
3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}$ **6)** $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{FB}$ **9)** $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CO}$

59 On considère quatre points A, B, C et D distincts tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes.

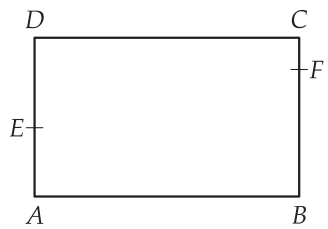
On appelle :

- A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur (CD)
- C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB)

1) Faire une figure.

2) Montrer que $AB \times C'D' = A'B' \times CD$.

60 On considère un rectangle $ABCD$ avec $AB = 5$ et $AD = 3$, E un point quelconque de $[AD]$ et F un point quelconque de $[BC]$.



1) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$.

2) Soit G un point de $[CD]$.

a) Exprimer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}$ en fonction de DG.

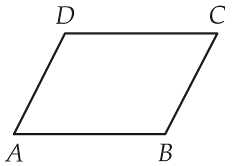
b) Exprimer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GF}$ en fonction de BF.

S'entraîner

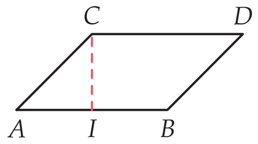
61 **Quelques configurations**

1) $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 3$ et $AC = 6$.

Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

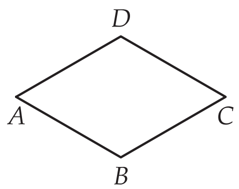


2) $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = a$ et I est à la fois le milieu de $[AB]$ et le projeté orthogonal de C sur (AB).
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



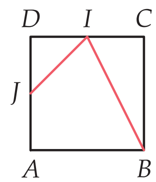
3) $ABCD$ est un losange de côté 4 et vérifiant $\widehat{BAD} = 60°$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



4) $ABCD$ est un carré de côté 1 et I est le milieu de $[DC]$ et J celui de $[AD]$.

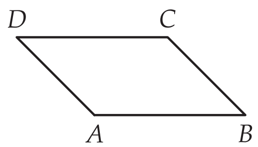
Calculer $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{BI}$.



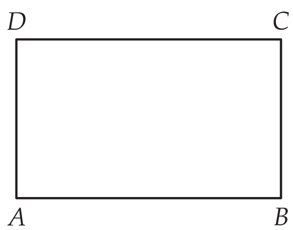
5) $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 5$ et $BD = 8$ et $\widehat{ABD} = 20°$.

Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Arrondir à 0,1 près.



62 On considère un rectangle $ABCD$ du plan.



Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = AD^2$

2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = BC^2$

3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{AB^2}{2}$

4) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{AD^2}{2}$

Vecteur normal et équation de droite

63 Donner un vecteur normal à la droite :

1) d_1 d'équation $2x - 3y + 5 = 0$

2) d_2 d'équation $12x - 3y = 2$

3) d_3 d'équation $8x = -9y + 7$

4) d_4 d'équation $-3y + 2x = 5$

5) d_5 d'équation $5y = 2$

64 Dire si la proposition est vraie ou fausse.

1) Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $4x - 6y = 1$.

2) Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $5y + 4x - 8 = 0$.

3) Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $-2y + 2x = 5$.

65 ► MÉTHODE 4 p. 226

Déterminer une équation de la droite :

1) de vecteur normal $\vec{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passant par $A(2\,;\,-5)$

2) de vecteur normal $\vec{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passant par $B(-3\,;\,6)$

3) de vecteur normal $\vec{c}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ et passant par $C(2\,;\,-3)$

4) de vecteur normal $\vec{d}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et passant par $D(3\,;\,9)$

5) de vecteur normal $\vec{e}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et passant par $E(7\,;\,8)$

66 Déterminer une équation de la droite :

1) de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et passant par $R(8\,;\,12)$

2) de vecteur normal $\vec{s}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et passant par $T(2\,;\,3)$

3) de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et passant par $C(-8\,;\,5)$ avec $A(1\,;\,1)$ et $B(6\,;\,6)$

4) de vecteur normal $\overrightarrow{MP}$ et passant par $F\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\right)$ avec $M\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{9}\right)$ et $P\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{7}{9}\right)$

5) de vecteur normal $\vec{t}\begin{pmatrix} -\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$ et passant par $\Omega(6\pi\,;\,3\pi - 1)$

67 On considère trois points $A(3\,;\,4)$, $B(-2\,;\,5)$ et $C(0\,;\,-1)$.
Déterminer une équation de :
1) la perpendiculaire à $[AC]$ passant par B
2) la hauteur issue de C dans ABC
3) la médiatrice de $[BC]$

68 On considère trois points $F(2\,;\,5)$, $G(4\,;\,-1)$ et $H(-1\,;\,3)$.
1) Déterminer les équations des hauteurs issues de H et F dans le triangle FGH.
2) En déduire les coordonnées de l'orthocentre de FGH.

69 On reprend les points F, G et H de l'exercice précédent.
1) Déterminer les équations des médiatrices de $[FG]$ et $[GH]$.
2) En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit à FGH.

70 On considère trois points $M(-4\,;\,3)$, $N(4\,;\,0)$ et $P(-1\,;\,-2)$.
1) Déterminer une équation de d, la hauteur issue de P dans MNP.
2) Déterminer une équation de la droite (MN).
3) a) Déterminer les coordonnées de P', pied de la hauteur issue de P dans MNP.
b) En déduire la longueur PP'.
4) En déduire l'aire de MNP.
5) Déterminer MM' et NN' où M' et N' sont respectivement les pieds des hauteurs issues de M et N dans MNP.

71 **Deux points et l'orthocentre** INFO
On considère deux points $A(-2\,;\,2)$ et $B(4\,;\,-1)$ du plan.
Le but de cet exercice est de déterminer un point C tel que $O(0\,;\,0)$ soit l'orthocentre de ABC.
1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et créer :
- A, B et O ;
- d, la perpendiculaire à $[AB]$ passant par O.

2) Créer un point C sur d puis la hauteur issue de B dans ABC.
3) a) Déplacer C sur d.
b) Conjecturer les coordonnées d'un point C répondant à la question posée.
4) Valider la conjecture par le calcul.

Applications du produit scalaire

72 Donner une équation du cercle :
1) de centre $\Omega_1(2\,;\,6)$ et de rayon 3
2) de centre $\Omega_2(-3\,;\,4)$ et de rayon $\sqrt{7}$

73 ► MÉTHODE 5 p. 227
On considère trois points $A(1\,;\,2)$, $B(4\,;\,6)$ et $C(-3\,;\,-8)$.
Donner une équation du cercle de diamètre :
1) $[AB]$ **2)** $[BC]$ **3)** $[AC]$

74 On considère l'équation $x^2-8x+y^2-6y=0$.
1) Écrire x^2-8x et y^2-6y sous forme canonique.
2) En déduire que :
$x^2-8x+y^2-6y=0 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=5^2$.
3) En déduire que $x^2-8x+y^2-6y=0$ est l'équation d'un cercle de centre Ω et de rayon r à préciser.

75 Déterminer l'ensemble d'équation :
1) $x^2+6x+y^2-12y=-40$
2) $x^2+20x+y^2+40y+499=0$
3) $x^2-2x+y^2-6y+10=0$
4) $x^2-6x+y^2+4y+30=0$

76 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(3\,;\,-4)$ et de rayon 2.
1) Donner une équation de $\mathscr{C}$.
2) Représenter $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.
3) a) Déterminer deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$.
b) En déduire une « nouvelle » équation de $\mathscr{C}$.
c) Montrer que les équations trouvées aux questions **1)** et **3)b)** sont équivalentes.

77 On considère la droite d'équation $x+3y-5=0$ et le cercle d'équation $(x-4)^2+(y+2)^2=9$.
1) Résoudre le système $\begin{cases} x+3y-5=0 \\ (x-4)^2+(y+2)^2=9 \end{cases}$.
2) Interpréter géométriquement les solutions du système.

78 Déterminer les points d'intersection éventuels du cercle d'équation $(x+5)^2+y^2=9$ et de la droite :
1) d_1 d'équation $3x-y+20=0$
2) d_2 d'équation $3x+y=5$

79 On considère trois points $A(-3\,;\,-4)$, $B(1\,;\,-2)$ et $C(0\,;\,4)$.
Déterminer les points d'intersection du cercle de centre A passant par C et de la perpendiculaire à $[AC]$ passant par B.

80 **Intersection de cercles** INFO

On considère trois points $A(1\,;\,3)$, $B(2\,;\,-1)$ et $C(6\,;\,8)$.

1) Donner une équation de $\mathscr{C}$, le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{26}$.
2) Déterminer une équation du cercle de diamètre $[BC]$.
3) Résoudre le système :

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-3)^2=26 \\ x^2-8x+y^2-7y+4=0 \end{cases}.$$

4) Concrètement, à quoi correspondent les solutions du système ? Contrôler avec un logiciel de géométrie.

81 **De nouveaux cosinus et sinus**

1) Calculer $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$.
2) En déduire $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

82 **Formules de duplication**

Soit x un réel.

1) Montrer que $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$.
2) a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $(\cos(x))^2$ et $(\sin(x))^2$.
   b) En utilisant l'égalité $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1$, montrer que :
   $\cos(2x)=2(\cos(x))^2-1=1-2(\sin(x))^2$.
3) a) Justifier que $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right)^2-1$ puis déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
   b) En déduire $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
4) Déterminer de même $\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$.

83 On veut résoudre $\cos(x)+\sin(x)=\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

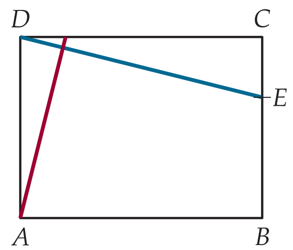
1) Justifier que cette équation est équivalente à $\cos(x)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda$.
2) Simplifier cette équation avec une formule d'addition.
3) En déduire l'ensemble des solutions de :
   $\cos(x)+\sin(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
4) Quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles l'équation $\cos(x)+\sin(x)=\lambda$ admet des solutions ?

Problèmes

84 On considère trois points $A(1\,;\,0)$, $B(4\,;\,1)$ et $C(2\,;\,5)$.

1) Faire une figure.
2) Montrer que $\cos\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.
3) En déduire que $\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.
4) Tracer C' le pied de la hauteur issue de C sur (AB) et montrer que $CC'=\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$.
5) En déduire l'aire de ABC.
6) a) Tracer le rectangle de sommets les points de coordonnées $(1\,;\,0)$, $(4\,;\,0)$, $(4\,;\,5)$ et $(1\,;\,5)$.
   b) Retrouver la réponse à la question précédente.

85 On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB=4$ et $AD=3$ ci-dessous avec $E\in[CB]$ tel que $EC=1$.



On cherche à déterminer où placer le point F de $[CD]$ tel que (DE) et (AF) soient perpendiculaires.
Pour cela, nous allons utiliser deux méthodes, l'une analytique, l'autre géométrique.

Partie A : Méthode analytique

1) Donner les coordonnées de A, D et E dans le repère $\left(A\,;\,\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB},\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$.
2) a) Soit $F(x\,;\,y)$.
   Donner une condition sur y pour que F appartiennent bien à (CD).
   b) Justifier que $(DE)\perp(AF)\Leftrightarrow\begin{cases} y=3 \\ 4x-3=0 \end{cases}$.
   c) En déduire où placer F sur $[CD]$ pour que (DE) et (AF) soient perpendiculaires.

Partie B : Méthode géométrique

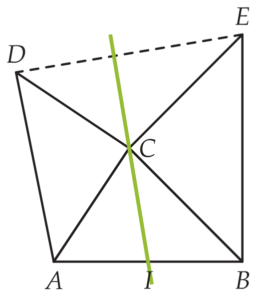
1) Montrer que $\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=4DF-3$.
2) En déduire que le point F de $[CD]$ tel que (DE) et (AF) soient perpendiculaires vérifie $DF=\dfrac{3}{4}$.

86 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$.
Les courbes représentatives de f et g admettent-elles des tangentes perpendiculaires ? Si oui, préciser lesquelles.

87 ALGO

Écrire un algorithme :
- demandant à l'utilisateur de rentrer les coordonnées de trois points A, B et C ;
- affichant une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ (on considérera qu'on utilise un logiciel possédant la fonction arccos).

88 On considère un triangle quelconque ABC, I le milieu de $[AB]$ et les points D et E tels que les triangles directs ACD et CBE soient isocèles et rectangles en C.

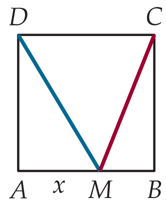


1) On a tracé (CI) la médiane issue de C dans ABC. Quelle droite remarquable de DCE semble-t-elle également être ?
2) Justifier que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
3) En déduire que $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}\right)$.
4) Conclure.

89 Soit m un réel strictement positif, d_m la droite d'équation $x + y = m$ et $\mathscr{C}_m$ le cercle de centre $O(0\,;\,0)$ et de rayon m.
1) Montrer que d_m et $\mathscr{C}_m$ sont sécants quelle que soit la valeur de m et donner leurs points d'intersection.
2) Soit $A(a\,;\,0)$, avec $a \in \mathbb{R}$, et $\mathscr{C}'_m$ le cercle de centre A et de rayon m.
   a) Montrer que d_m et $\mathscr{C}'_m$ ont au moins un point commun si et seulement si $-a^2 + 2ma + m^2 > 0$.
   b) Résoudre cette inéquation d'inconnue a et en déduire où placer A pour que d_m et $\mathscr{C}'_m$ aient au moins un point commun.

90 INFO

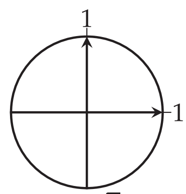
On considère un carré $ABCD$ de côté 1 avec $M \in [AB]$ et on note $x = AM$.



1) On considère le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
   a) Donner les coordonnées de A, B, C, D et M dans ce repère.
   b) En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$.
   c) Exprimer $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ en fonction de x.
   d) L'angle $\widehat{CMD}$ peut-il être droit ?
2) a) Exprimer MC et MD en fonction de x.
   b) Montrer que $\cos\left(\widehat{CMD}\right) = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{(1+x^2)(2-2x+x^2)}}$.
3) Dans un logiciel de calcul formel, on a entré successivement :
   - `f(x):=(x^2-x+1)/sqrt((1+x^2)*(2-2x+x^2))`
   - `h(x):=deriver(f(x),x)`
   - `resoudre(h(x)=0,x)`
   - `resoudre(h(x)>0,x)`
   - `resoudre(h(x)<0,x)`

   où `sqrt` désigne la racine carrée.
   a) Aux trois dernières étapes, le logiciel répond successivement :
      - `x=1/2`
      - `x>1/2`
      - `x<1/2`

      Interpréter ce résultat.
   b) En déduire le tableau de signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f sur $[0\,;\,1]$.
   c) Quel est le minimum de f sur $[0\,;\,1]$?
4) a) On a tracé ci-dessous le cercle trigonométrique :



   Le reproduire et placer $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 0,6 sur l'axe des abscisses.
   b) Déterminer, à 0,01 degré près, la mesure maximale de l'angle $\widehat{CMD}$.

Approfondir

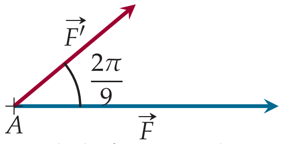
91 INFO

1) Dans un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction inverse.
2) Créer trois curseurs a, b et c variant de -5 à 5 avec un pas de 0,1 puis les points A, B et C de $\mathscr{C}$ d'abscisse respective a, b et c.
3) Construire H, l'orthocentre de ABC pour des valeurs différentes de a, b et c.
4) a) Faire varier a, b et c. Quelle conjecture peut-on faire sur la position de H ?
   b) Conjecturer une relation entre y_H et a, b et c puis entre x_H et a, b et c.
5) Démontrer ces conjectures.

92 **Intensité d'une force**

L'intensité d'une force $\vec{F}$ est $\left\|\vec{F}\right\|$, exprimée en Newton.

On considère un point A auquel s'exercent deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ d'intensité respective 100 N et 60 N et telles que $\left(\vec{F};\vec{F'}\right) = \frac{2\pi}{9}\ (2\pi)$.



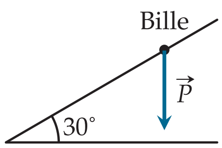
Calculer l'intensité de la force résultante $\vec{F} + \vec{F'}$.

93 **Travail d'une force constante**

Lorsqu'un objet se déplace de manière rectiligne d'un point A à un point B en étant soumis à une force constante $\vec{F}$, le travail de cette force $W_{AB}\left(\vec{F}\right)$ est donné par $W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{F}$ où :

- la distance est exprimée en mètre ;
- l'intensité de la force est exprimée en Newton ;
- le travail est exprimé en Joule.

On laisse glisser une bille de 50 g le long d'un pente de 10 m inclinée de 30° en étant uniquement soumise à son poids (on néglige les frottements).



Calculer le travail du poids de la bille lors de son déplacement.

On rappelle que l'intensité de $\vec{P}$, exprimée en Newton, est $P = m \times g$ avec $g = 9{,}8\,\text{m/s}$ et m est exprimé en kg.

94 **Distance d'un point à une droite**

On dit que la distance entre une droite d et un point A du plan est la longueur AA' où A' est le projeté orthogonal de A sur d.

Partie A : Formule explicite

On considère une droite d d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $A(x_A ; y_A)$.

1) Dans un repère du plan, tracer une droite d quelconque, un point A extérieur à d et A' son projeté orthogonal sur d.
2) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal de d.
   Montrer que $||\vec{n} \cdot \overrightarrow{A'A}|| = A'A\sqrt{a^2 + b^2}$.
3) a) Exprimer $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A'A}$ en fonction de a, b, x_A, y_A, $x_{A'}$ et $y_{A'}$.
   b) Justifier que $-ax_{A'} - by_{A'} = c$.
   c) En déduire que la distance entre A et d est :
$$\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Partie B : Application

Soit trois points $F(0\,;\,6)$, $G(2\,;\,-1)$ et $H(-1\,;\,3)$.

1) Déterminer une équation de (FG).
2) En déduire la distance de H à (FG).
3) Calculer l'aire de FGH.

95 **Formules d'addition**

Prérequis. On supposera connues les propriétés suivantes :

- pour tous réels a et b, on a : $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
- pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$.

1) En remarquant que $a + b = a - (-b)$, exprimer $\cos(a + b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
2) a) Exprimer $\cos\left((a - b) + \frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\sin(a - b)$.
   b) Exprimer $\cos\left(\left(a + \frac{\pi}{2}\right) - b\right)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
   c) En déduire $\sin(a - b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
3) Déduire $\sin(a + b)$ de la formule trouvée à la question précédente.

96 On suppose connues les formules de duplication :

- $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Résoudre les équations :

1) $\sin(2x) = \cos(x)$ dans $[0 ; 2\pi[$

2) $\sin(2x) = \sin(x)$ dans $]-\pi ; \pi]$

3) $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$

4) $2\cos(2x) - \sqrt{3}\cos(x) + \dfrac{1}{2} = 0$ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$

97 Aire d'un triangle et formule des sinus

On considère un triangle ABC dans lequel on note $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ et A', le projeté orthogonal de A sur (BC).

Partie A : Aire d'un triangle

1) Tracer trois figures (on tracera $[BC]$ horizontalement) :

- l'une où le point A' appartient à $[BC)$ privé de B ;
- une autre où A' est confondu avec B ;
- la dernière où A' n'appartient pas à $[BC)$.

2) Raisonnons par disjonction des cas.

a) Dans les deux premiers cas, montrer que l'on a $AA' = c\sin\left(\widehat{ABC}\right)$.

b) Dans le troisième cas, montrer préalablement que l'on a $AA' = c\sin\left(\widehat{ABA'}\right)$.

En déduire que $AA' = c\sin\left(\widehat{ABC}\right)$.

3) Montrer que l'aire de ABC est $\dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$.

4) Par symétrie des notations, donner l'aire de ABC en fonction de $\sin\widehat{A}$ puis en fonction de $\sin\widehat{C}$.

Partie B : Formule des sinus

1) En utilisant la partie précédente, montrer que :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\text{Aire de } ABC}.$$

Cette formule est appelée formule des sinus.

2) Déterminer l'aire d'un triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 30°$.

98 Cercle et fonction(s)

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon 3.

1) a) Le tracer dans un repère orthonormé.

b) Est-ce la courbe d'une fonction ? Expliquer.

2) Donner une équation de $\mathscr{C}$.

3) Montrer que cette équation est équivalente à :

$y = 2 + \sqrt{9-(x-1)^2}$ ou $y = 2 - \sqrt{9-(x-1)^2}$.

4) On considère les fonctions f et g définies par :

- $f(x) = 2 + \sqrt{9-(x-1)^2}$;
- $g(x) = 2 - \sqrt{9-(x-1)^2}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de ces fonctions.

b) Tracer les courbes représentatives de ces fonctions de deux couleurs dans le repère précédent.

Que remarque-t-on ?

c) Un logiciel de calcul formel donne $f'(3) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $g'(3) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Donner les équations respectives des deux tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisse 3.

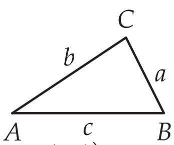
99 Pourquoi pas avec des coordonnées ?

Marc n'arrive pas à faire son exercice :

> On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 6$ cm, $AC = \sqrt{10}$ cm et $BC = \sqrt{34}$ cm.
> Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Il a demandé de l'aide sur un forum internet sur lequel un certain rene1596 lui a recommandé de traiter son exercice analytiquement c'est-à-dire avec des coordonnées.

Partie A : Cas général



Dans un triangle ABC, on note $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

1) Soit $\vec{\imath} = \dfrac{1}{c}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath}$ tel que $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ soit orthonormé direct.

Donner les coordonnées de A et B dans $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

2) Justifier que C est un des points d'intersection des deux cercles d'équations respectives $x^2 + y^2 = b^2$ et $(x-c)^2 + y^2 = a^2$.

3) Résoudre le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ (x-c)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$.

4) En déduire les coordonnées de C dans ce repère (on prendra le point d'ordonnée la plus grande).

Partie B : Retour à l'exercice

1) Donner les coordonnées des points A, B et C de l'exercice de Marc dans le repère de la partie précédente.

2) En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Calculer un produit scalaire

- avec la définition
- avec les coordonnées dans un repère orthonormé
- avec les projetés ou la formule utilisant le cosinus
- à l'aide des propriétés algébriques

Utiliser le produit scalaire

- pour montrer que des droites sont perpendiculaires
- pour calculer la mesure d'un angle

Déterminer et identifier

- un ensemble de points défini grâce à un produit scalaire
- un vecteur normal à une droite d'équation donnée
- une équation de droite connaissant un vecteur normal et un point
- une équation de cercle
  - de centre Ω et de rayon r
  - de diamètre $[AB]$

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 8\,\text{cm}$, $AC = 4\,\text{cm}$ et $BC = 6\,\text{cm}$.

100 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$

(a) -84 (b) -42 (c) 42 (d) 116

101 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} =$

(a) $AC \times BC$ (b) $-AC \times CB$ (c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ (d) $-\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

102 $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) =$

(a) $AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et AC^2
(b) $AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et AC
(c) $AB^2 + BC^2$ et AC^2
(d) $AB^2 + BC^2$ et AC

103 L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ est :

(a) le cercle de centre C et de rayon AB
(b) la hauteur issue de C dans le triangle ABC

On considère quatre points $A(2\,;\,3)$, $B(5\,;\,7)$, $C(-8\,;\,10)$ et $D(0\,;\,4)$ dans un repère orthonormé du plan.

104 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$

(a) -48 (b) 0 (c) 14

105 Les droites (AB) et (CD) sont :

(a) perpendiculaires (b) parallèles (c) sécantes

106 Le cercle de centre C et de rayon 3 a pour équation :

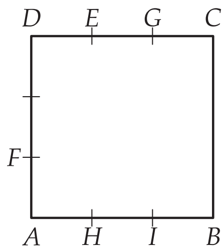
(a) $(x-8)^2 + (y+10)^2 = 3$
(b) $(x+8)^2 + (y-10)^2 = 3$
(c) $(x-8)^2 + (y+10)^2 = 9$
(d) $(x+8)^2 + (y-10)^2 = 9$

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

107 $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

ⓐ 5 ⓑ $5\sqrt{2}$ ⓒ $5\sqrt{3}$

On considère le carré $ABCD$ de côté 3 ci-dessous et les points E, F, G, H et I qui sont régulièrement espacés sur les côtés.



108 $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AE} =$

ⓐ $AI \times AH$ ⓑ $-AI \times AH$ ⓒ 2

109 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GF} =$

ⓐ $AB \times IA$ ⓑ $AB \times AI$ ⓒ $-AB \times IA$ ⓓ $-AB \times AI$

110 $\cos\left(\widehat{EAB}\right) =$

ⓐ $\dfrac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}}{AE \times AB}$ ⓑ $\dfrac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB}}{EA \times AB}$ ⓒ $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

111 En se plaçant dans $\left(A\,;\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AF}\right)$, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{IC} =$

ⓐ -7 ⓑ 7 ⓒ -11

Dans les questions **112** à **114**, on se place dans un repère orthonormé du plan.

112 La droite d'équation $2x - 3y + 47 = 0$ admet pour vecteur normal :

ⓐ $\vec{n_1}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ⓑ $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⓒ $\vec{n_3}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⓓ $\vec{n_4}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

113 La droite passant par $A(4\,;7)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a pour équation :

ⓐ $3x + y - 19 = 0$ ⓑ $3x + y + 19 = 0$ ⓒ $-x + 3y + 17 = 0$ ⓓ $-x + 3y - 17 = 0$

114 Soit $B(6\,;8)$ et $C(-2\,;4)$. Le cercle de diamètre $[BC]$ a pour équation :

ⓐ $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 20$ ⓑ $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 100$ ⓒ $x^2 - 4x + y^2 - 12y + 20 = 0$

Travaux pratiques

TP 1 Un algo pour gagner du temps

INFO ALGO

Pour demain, Florian doit faire l'exercice suivant :

> Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, A un point du plan et d' la perpendiculaire à d passant par A.
> Déterminer les coordonnées d'un deuxième point B de d' afin de pouvoir la tracer (pour avoir un tracé précis, on prendra un point assez éloigné de A par exemple, $x_B = x_A + 5$) avec :
>
> **1)** $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $A(-2\,;\,6)$ **3)** $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A(6\,;\,7)$ **5)** $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $A(0\,;\,0)$
>
> **2)** $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A(3\,;\,4)$ **4)** $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A(-1\,;\,2)$ **6)** $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A(4\,;\,3)$

Jugeant cet exercice trop répétitif, Florian décide d'écrire l'algorithme ci-contre que nous allons essayer de comprendre.

```
Liste des variables utilisées
   xu,yu,xA,yA,xB,yB : réel
Traitement
   Demander xu
   Demander yu
   Demander xA
   Demander yA
   Donner à xB la valeur de xA+5
   Donner à yB la valeur de ...
Affichage
   Afficher "Les coordonnées de B sont "
   Afficher xB
   Afficher yB
```

1) a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ pour que d et d' soient perpendiculaires.

b) Traduire cette condition en termes de coordonnées (on obtiendra un égalité en fonction de $x_A\,;\,y_A$, x_B, y_B, $x_{\vec{u}}$ et $y_{\vec{u}}$).

c) Compléter les pointillés dans l'algorithme afin qu'il réponde à la problématique posée.

2) Saisir l'algorithme dans un logiciel de programmation ou sur la calculatrice.

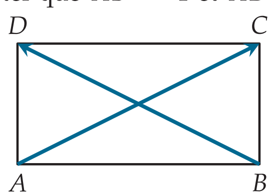
3) Utiliser l'algorithme pour répondre aux questions de l'exercice posé à Florian.

4) Expliquer le problème rencontré.

5) Modifier l'algorithme afin qu'il permette de traiter tous les cas possibles en utilisant un test `Si ... Alors`.

TP 2 De l'importance de savoir respecter la norme

On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AD = 2$ dans lequel on doit calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.



1) a) Donner sans calcul $\left\|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right\|$ puis calculer $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{BD}\right\|$.

b) En déduire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ avec la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

2) Reproduire la figure en prenant le cm pour unité.

3) Pour calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, Alma et Adem ont eu la même idée, introduire un repère orthonormé, mais pas le même :

- Alma propose le repère $\left(A\,;\,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$
- Adem propose le repère $\left(A\,;\,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

a) Donner les coordonnées des quatre points de la figure dans le repère d'Alma puis calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

b) Même question avec le repère d'Adem.

c) Que remarque-t-on ?

4) D'Adem ou d'Alma, qui a choisi « le bon » repère orthonormé et pourquoi ?

TP 3 En passant par la médiane

INFO

Dans ce TP, on considère deux points du plan A et B fixés et un réel positif k.

1 Avec un logiciel de géométrie dynamique

On s'intéresse à l'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 + MB^2 = k$, dont on dit que c'est une ligne de niveau.

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

2) Créer deux points A et B « pas trop éloignés » et un curseur k variant entre 0 et 100 avec un pas de 1 et le régler sur 50.

3) Soit $M(x;y)$ dans un repère orthonormé, traduire $MA^2 + MB^2 = k$ en termes de coordonnées.

4) a) Dans la barre de saisie, écrire `(x-x(A))^2+(y-y(A))^2+(x-x(B))^2+(y-y(B))^2=k`.

b) Quelle semble être la nature de l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$?

c) Faire varier k et affiner la conjecture faite à la question précédente (on pourra éventuellement créer d'autres points).

2 Avec le théorème de la médiane

1) Soit I, le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

2) En déduire que $MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2$.

3) Démontrer le théorème de la médiane :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.

Pour tout M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.

4) Montrer que $MA^2 + MB^2 = k$ est équivalent à $MI^2 = \frac{2k - AB^2}{4}$.

5) a) En déduire pour quelles valeurs de k il existe des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$.

b) Quel est alors l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$?

3 Une autre ligne de niveau

On s'intéresse maintenant à une autre ligne de niveau, l'ensemble des points M vérifiant l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

1) En s'inspirant du travail fait dans les parties précédentes, déterminer l'ensemble des points M, vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$ dans le cas où $A(1\,;\,2)$ et $B(4\,;\,-2)$ dans un repère orthonormé.

2) Donner, dans le cas général, l'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

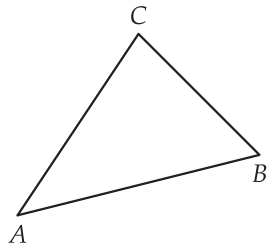
Travaux pratiques

TP 4 Théorème d'Al-Kashi

Tout le monde connaît le théorème de Pythagore (mais rappelons-le tout de même) :
Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Autrement dit, quand on connaît les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle, on peut calculer la longueur du troisième. Oui, mais si le triangle n'est pas rectangle ?

1 Théorème d'Al-Kashi

On considère un triangle ABC quelconque.



1) Développer $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$.

2) En déduire que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AB \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

3) Par symétrie des notations, écrire :
- AC^2 en fonction de BC, AB et $\widehat{ABC}$;
- AB^2 en fonction de BC, AC et $\widehat{ACB}$.

4) a) Expliquer pourquoi cette formule est aussi appelée théorème de Pythagore généralisé.

b) D'une manière générale, quand on connaît les longueurs de deux côtés d'un triangle, peut-on calculer la longueur du troisième ? Si non, de quelle information supplémentaire a-t-on besoin ?

2 Résolution de triangle

En géométrie, résoudre un triangle consiste à en donner les longueurs des côtés et les mesures des angles.

1) On considère un triangle ABC avec $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 45°$.

a) Déterminer la longueur BC avec le théorème d'Al-Kashi.

b) Déterminer les mesures des angles de ABC. On arrondira à 0,1°près.

2) Résoudre le triangle ABC avec $AB = 7\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = 20°$. On arrondira les longueurs à 0,1 cm et les mesures des angles à 0,1°près.

3 Résolution de triangle (mais plus dur...)

On considère un triangle ABC avec $AB = 2\,\text{cm}$, $AC = 5\,\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

1) Tracer un triangle correspondant à ces conditions.

2) Écrire le théorème d'Al-Kashi faisant intervenir l'angle $\widehat{ABC}$ et remplacer par les valeurs connues.

3) a) Résoudre l'équation $x^2 - 2x - 21 = 0$.

b) Résoudre le triangle ABC.

TP 5 En prenant la tangente

INFO

Dans tout le TP, le plan est muni d'un repère orthonormé.

1 Une définition de la tangente

Le but de cette partie est de dégager, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, une définition de la tangente à un cercle en un point de celui-ci.

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

2) Créer un point A quelconque et un curseur r variant de 0 à 5.

3) Créer le cercle de centre A et de rayon r.

4) Créer un point B sur ce cercle puis, avec l'outil `Tangentes`, créer la tangente au cercle au point B.

5) Créer le rayon $[AB]$. Que remarque-t-on ?

6) Faire varier r et bouger A dans le plan et B, sur le cercle.
La remarque précédente semble-t-elle encore valide ?

7) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre A.
Proposer une définition de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point B de ce cercle.

Dans la suite, on prendra cette définition de la tangente.

Les parties **2**, **3** *et* **4** *peuvent être traitées indépendamment.*

2 Une propriété géométrique

1) Sur la figure précédente, dans le logiciel de géométrie dynamique, créer un point D sur le cercle, non diamétralement opposé à B, puis la tangente au cercle en ce point D.

2) Créer le point E, intersection des deux tangentes.

3) Émettre une conjecture sur le triangle DBE.

4) Démontrer cette conjecture.

3 Équation d'une tangente

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(4\,;\,1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

1) Montrer que $B(5\,;\,3)$ appartient à $\mathscr{C}$.

2) Déterminer par le calcul une équation cartésienne de T, la tangente à $\mathscr{C}$ en B.

4 Tangente passant par l'origine

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(4\,;\,1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
On cherche à déterminer s'il existe un ou des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ passe par l'origine.

1) Soit $M(x\,;\,y) \in \mathscr{C}$. Montrer que le point M répond au problème posé si et seulement si

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (x-4)(x-0) + (y-1)(y-0) = 0 \end{cases}.$$

2) Montrer que le système précédent est équivalent à $\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - y + (-4x + 16 - y + 1) = 5 \\ x^2 - 4x + y^2 - y = 0 \end{cases}$
puis le résoudre.

3) Conclure.

4) Contrôler avec un logiciel de géométrie.

Travaux pratiques

TP 6 Une inégalité remarquable

Le but de ce TP est de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\|\vec{u}\cdot\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$.

Pour cela, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \|\vec{u}+x\vec{v}\|^2$.

1) Quel est le signe de f ?

2) Montrer que $f(x) = x^2\|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v})x + \|\vec{u}\|^2$.

3) **a)** Calculer le discriminant Δ de la fonction du second degré f.

b) D'après la question 1, quel est le signe de Δ ?

c) En déduire que $4\,(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqslant 4\,\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$.

d) Conclure.

Pour montrer cette inégalité, on aurait aussi pu utiliser la formule du cours :

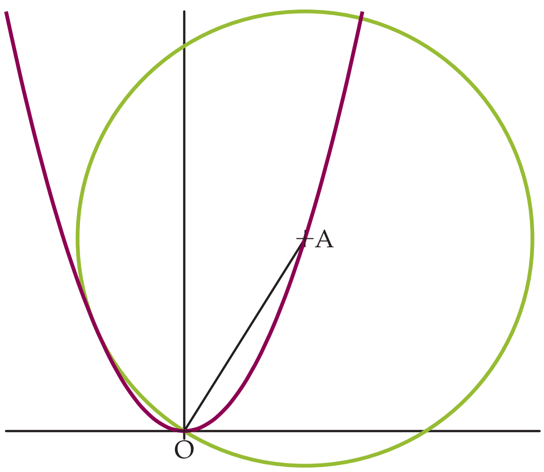
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$$

mais cela aurait-été nettement moins amusant !
Cette formule permet également de montrer facilement que cette inégalité n'est une égalité que si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Récréation, énigmes

Cercle et parabole

Dans un repère orthonormé, on considère $\mathscr{C}$, la courbe représentative de la fonction carré et un point A sur cette courbe.
Montrer qu'il y a deux « positions » possibles pour A sur $\mathscr{C}$ pour que le cercle de centre A et de rayon OA admette une tangente commune avec $\mathscr{C}$ et déterminer ces « positions » (on utilisera un logiciel de calcul formel pour les calculs).



De l'art de multiplier des vecteurs

Mener des recherches afin de déterminer :

1) ce que veut dire le mot **scalaire** qui donne son nom au produit scalaire ;

2) s'il existe une ou d'autres façon(s) de « multiplier » deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (du plan ou de l'espace).

STATISTIQUES PROBABILITÉS

1

Statistiques

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Lire une série statistique représentée par un tableau
- Calculer médiane et quartiles d'une série statistique
- Calculer la moyenne d'une série statistique
- Lire une notation avec des indices

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Dans la classe de 1re S1, on demande aux élèves combien d'heures de travail à la maison ils consacrent aux mathématiques par semaine.
Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'heures	2	3	4	5	10
Nombre d'élèves	3	7	5	19	1

1) Quelle ligne du tableau correspond aux valeurs de la série et quelle ligne correspond aux effectifs ?
2) Quel est l'effectif total de cette classe ?
3) Déterminer la médiane de cette série statistique.
4) Déterminer les premier et troisième quartiles Q_1 et Q_3 de cette série statistique.
5) Déterminer la moyenne de cette série statistique.

2 Dans la classe de 1re S2, un élève a relevé le nombre de pages de tous ses manuels scolaires.
Il obtient 320 ; 352 ; 336 ; 288 ; 512 ; 256.
1) Ordonner cette série statistique.
2) En déduire sa médiane.
3) Cette médiane est-elle supérieure à la moyenne de la série ?
4) Ayant choisi l'option latin en cours d'année, il reçoit un 7e manuel.
Donner un nombre de pages possible pour ce livre sachant que la médiane sera alors 320 et que le nombre de pages est forcément un multiple de 16.

3 On considère le tableau.

i	1	2	3	4
x_i	5	9	3	7
y_i	2	4	8	3

1) Calculer $x_1y_1 + x_3x_2$.
2) Calculer $|x_2 - 5y_3x_4|$.

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

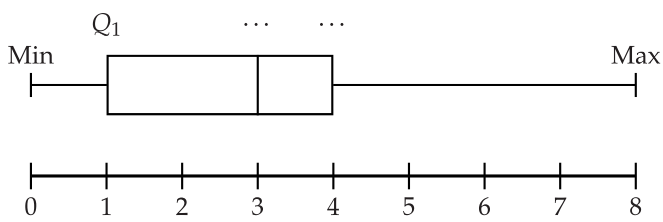
ACTIVITÉ 1 Buts !

Partie 1 : Buts à la Coupe du monde 2014

Le tableau suivant récapitule le nombre de buts marqués par match lors de la Coupe du monde de football 2014.

Nombre de buts	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de matchs	7	12	8	20	9	4	2	1	1

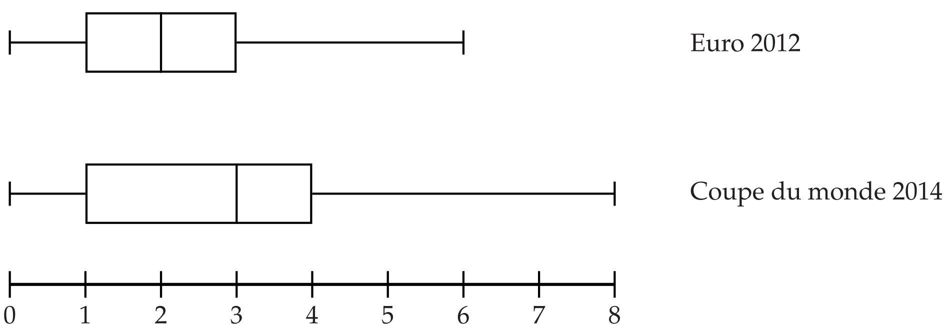
1) Indiquer le nombre de matchs durant lesquels 4 buts exactement ont été marqués.
2) Combien y a-t-il eu de matchs pendant cette Coupe du monde ?
3) Combien de buts ont été marqués lors de cette Coupe du monde ?
4) Calculer la médiane et les quartiles de la série statistique constituée du nombre de buts marqués par match.
5) On considère le graphique suivant, appelé diagramme en boîte correspondant à cette série.



Recopier ce diagramme en boîte et compléter les pointillés.

Partie 2 : Buts à l'Euro 2012

On donne, sur le même graphique, le diagramme en boîte correspondant à la série du nombre de buts marqués par match lors de l'Euro 2012.



1) Lire le minimum, le maximum, la médiane et les premier et troisième quartiles de la série du nombre de buts marqués par match lors de l'Euro 2012 sur le diagramme en boîte correspondant.
2) L'Euro 2012 a-t-il été plutôt plus ou moins offensif que la Coupe du monde 2014 ? Argumenter.

ACTIVITÉ 2 Distances dans le système solaire

INFO

Partie 1 : Écart moyen

On considère la feuille de tableur ci-dessous donnant les distances des planètes du système solaire au Soleil.

	A	B	C
1	Planète	Distance au Soleil en millions de km	Écart entre la distance au Soleil et la moyenne
2	Mercure	58	
3	Vénus	108	
4	Terre	150	
5	Mars	228	
6	Jupiter	778	
7	Saturne	1429	
8	Uranus	2871	
9	Neptune	4503	
10		Moyenne des distances au Soleil	Moyenne des écarts

1) Reproduire les colonnes `A` et `B` de cette feuille de calcul dans un tableur.

2) **a)** Saisir une formule dans la cellule `B11` permettant d'obtenir la moyenne des distances des planètes au Soleil. Dans la suite, on notera $\overline{x}$ cette moyenne.

b) En utilisant la commande `ABS`, saisir une formule dans la cellule `C2` afin d'obtenir l'écart entre $\overline{x}$ et la distance Mercure-Soleil et de compléter la colonne `C` par recopie vers le bas.

c) Recopier cette formule vers le bas jusqu'à la cellule `C9`.

3) Saisir une formule dans la cellule `C11` permettant d'obtenir la moyenne des valeurs de la colonne `C`.

4) Ce résultat est appelé écart moyen de la série des distances au Soleil.
Expliquer intuitivement pourquoi l'écart moyen est une mesure de dispersion par rapport à la moyenne de la série.

Partie 2 : Écart-type

Dans la pratique, les statisticiens privilégient à l'écart moyen un autre indicateur : l'écart-type.

1)
- Inscrire `Écart-type des distances au Soleil` dans la cellule `B12` ;
- saisir `=ECARTYPEP(B2:B9)` dans la cellule `B13` : cette valeur est l'écart-type de la série.

2) La formule de l'écart-type σ d'une série de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ est $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$.

Ici, on a $x_1 = 58$, $x_2 = 108$, etc.
Retrouver la valeur obtenue en `B13` à l'aide de cette formule.

3) Avant 2006, Pluton était considérée comme une planète du système solaire.

a) Sachant que la distance entre Pluton et le Soleil est d'environ 5 900 millions de km, peut-on intuitivement penser qu'avant 2006, l'écart-type des distances des planètes au Soleil était plus grand ou plus petit qu'à l'heure actuelle ?

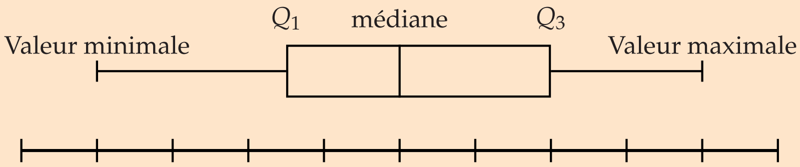
b) Vérifier à l'aide du tableur ou par le calcul.

Cours - Méthodes

1. Diagramme en boîte et écart-interquartile

DÉFINITION : Diagramme en boîte

Le **diagramme en boîte** d'une série statistique est le graphique suivant :



où l'axe est gradué régulièrement de sorte que l'on puisse y faire figurer les valeurs minimale et maximale, le 1^er^ quartile Q_1, la médiane et le 3^e^ quartile Q_3 (voir lexique pour les rappels).

MÉTHODE 1 Tracer un diagramme en boîte

► Ex. 13 p. 255

Exercice d'application

Dans une exploitation agricole, on a prélevé un échantillon de 125 tomates cerise afin de vérifier leur calibrage.
On obtient les résultats suivants :

Diamètre (en mm)	35	36	37	38	39	40
Effectif	21	27	16	23	17	21

Dresser le diagramme en boîte de cette série statistique.

Correction

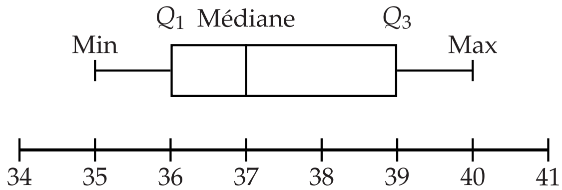
On peut commencer par calculer les effectifs cumulés croissants :

Diamètre (en mm)	35	36	37	38	39	40
Effectifs cumulés croissants	21	48	64	87	104	125

On détermine ensuite les valeurs nécessaires au tracé du diagramme en boîte.

- La valeur minimale de cette série est 35 et sa valeur maximale est 40.
- On calcule $\frac{125}{2} = 62{,}5$ donc la médiane est la 63^e^ valeur c'est-à-dire 37.
- On calcule $\frac{125}{4} = 31{,}25$ donc Q_1 est la 32^e^ valeur c'est-à-dire $Q_1 = 36$.
- On calcule $\frac{125 \times 3}{4} = 93{,}75$ donc Q_3 est la 94^e^ valeur c'est-à-dire $Q_3 = 39$.

On en déduit alors le diagramme en boîte de la série :



REMARQUE : Pour une série constituée d'un nombre suffisamment élevé de valeurs différentes, le diagramme en boîte sépare la série en quatre sous-séries d'effectifs sensiblement égaux, regroupant donc chacune environ 25 % des valeurs.

DÉFINITION : Intervalle et écart interquartile

Pour une série statistique de premier et troisième quartiles Q_1 et Q_3 :

- l'**intervalle interquartile** de la série est $[Q_1\ ;\ Q_3]$;
- l'**écart interquartile** est $Q_3 - Q_1$.

Exemple Dans l'exemple précédent, l'intervalle interquartile est $[36\ ;\ 39]$ et l'écart interquartile est $39 - 36 = 3$.

Remarques :

- L'intervalle interquartile contient au moins (et environ, si la série est constituée d'un nombre suffisamment élevé de valeurs différentes) la moitié des valeurs de la série.
- L'écart interquartile est insensible aux valeurs extrêmes.
- L'écart interquartile est un **indicateur de dispersion** de la série : plus il est faible, plus la série est homogène.
- D'une manière générale, un indicateur qui permet de décrire les écarts entre différentes valeurs de la série est dit « de dispersion ». C'est le cas de l'étendue par exemple.

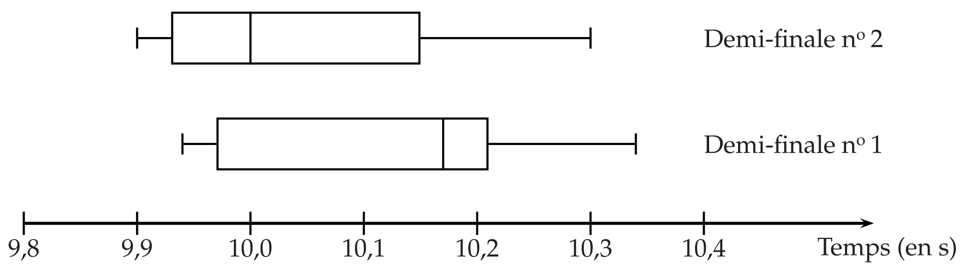
MÉTHODE 2 Comparer deux séries statistiques

► Ex. 15 p. 256

Tracer les diagrammes en boîte de deux séries (ou plus) sur le même graphique permet de les comparer, notamment en observant leur écart interquartile respectif, même si elles n'ont pas le même effectif.

Exercice d'application

On donne ci-dessous les diagrammes en boîte des séries statistiques donnant les temps des coureurs des deux demi-finales du 100 m masculin aux championnats du monde d'athlétisme de 2013.



1) Dans quelle demi-finale les coureurs ont-ils été globalement les plus rapides ?
2) Laquelle a été la plus équilibrée ?

Correction

1) On remarque que tous les indicateurs (minimum, Q_1, médiane, Q_3 et maximum) de la demi-finale nº 2 sont inférieurs à ceux de la demi-finale nº 1 : les coureurs de la demi-finale nº 2 ont donc été globalement plus rapides.
2) Quand on mesure avec une règle graduée, on constate que l'écart-interquartile est plus petit pour la demi-finale nº 2 que pour la demi-finale nº 1 (et l'étendue sensiblement égale), on peut donc penser que la demi-finale nº 2 a été plus équilibrée.

2. Variance et écart-type

DÉFINITION : Variance et écart-type

- Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une série statistique de moyenne $\overline{x}$.
  La **variance** V est donnée par la formule :

$$V = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}.$$

- Si l'on peut écrire la série sous forme de tableau d'effectifs :

Valeur	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

La formule précédente de la **variance** devient :

$$V = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_p(x_n-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\ldots+n_p} = \frac{\sum_{i=1}^{p}n_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{p}n_i}.$$

- L'**écart-type** σ d'une série statistique est $\sigma = \sqrt{V}$.

MÉTHODE 3 Déterminer l'écart-type

► Ex. 23 p. 257 et ► Ex. 24 p. 257

Exercice d'application

1) Déterminer l'écart-type σ de la série de valeurs 2 ; 3 ; 4 ; 8 ; 9 ; 12 ; 13 et 41.
2) Déterminer l'écart-type σ de la série.

Valeur	0	1	2	3
Effectif	4	18	6	4

Correction

1) On commence par calculer la moyenne $\bar{x} = \frac{2+3+4+8+9+12+13+41}{8} = 11,5.$
   On en déduit que la variance est :
   $$V = \frac{(2-11,5)^2+(3-11,5)^2+(4-11,5)^2+\ldots+(13-11,5)^2+(41-11,5)^2}{8}$$
   $$V = \frac{1110}{8} = 138,75.$$
   L'écart-type est $\sigma = \sqrt{138,75} \approx 11,8$.
2) On commence par calculer la moyenne $\overline{x} = \frac{4\times 0+18\times 1+6\times 2+4\times 3}{4+18+6+4} = 1{,}312\,5.$
   On en déduit que la variance est :
   $$V = \frac{4\,(0-1{,}312\,5)^2+18\,(1-1{,}312\,5)^2+6\,(2-1{,}312\,5)^2+4\,(3-1{,}312\,5)^2}{4+18+6+4}$$
   $$= \frac{22{,}875}{32} \approx 0{,}715.$$
   L'écart-type est $\sigma = \sqrt{\frac{22{,}875}{32}} \approx 0{,}8$.

MÉTHODE 4 Déterminer l'écart-type avec la calculatrice : série de valeurs

► Ex. 23 p. 257

Exercice d'application

Déterminer l'écart-type σ de la série de valeurs 2 ; 3 ; 4 ; 8 ; 9 ; 12 ; 13 et 41.

Correction

Calculatrice TI

- On appuie sur la touche stats ;
- on choisit le menu **1:Edite...** ;
- on saisit les valeurs 2 ; 3 ; etc. dans `L1` ;
- on appuie sur la touche stats puis on appuie sur la flèche de droite pour se déplacer sur **CALC** ;
- on choisit **1:Stats 1-Var** puis on écrit `L1` avec 2nde puis 1 afin d'obtenir `Stats 1-Var L1` et on valide avec entrer ;
- l'écart-type est la valeur `σx=11.77921899` donc $\sigma \approx 11,8$ (et la moyenne est $\overline{x} = 11,5$).

Calculatrice CASIO

- On appuie sur la touche MENU et on choisit le menu **2 : STAT** ;
- on saisit les valeurs 2 ; 3 ; etc. dans `List 1` ;
- on choisit le menu **CALC** puis **SET** ;
- on règle `1Var XLIST` sur `List 1` et `1Var Freq` sur `1` puis on appuie sur la touche EXIT ;
- on choisit le menu `1VAR` ;
- l'écart-type est `σx =11.7792189` donc $\sigma \approx 11,8$ (et la moyenne est $\overline{x} = 11,5$).

MÉTHODE 5 Déterminer l'écart-type avec la calculatrice : tableau d'effectifs

► Ex. 24 p. 257

Exercice d'application

Déterminer l'écart-type σ de la série.

Valeur	0	1	2	3
Effectif	4	18	6	4

Correction

Calculatrice TI

- On appuie sur la touche stats ;
- on choisit le menu **1:Edite...** ;
- on saisit les valeurs 0 ; 1 ; 2 et 3 dans `L1` et les effectifs 4 ; 18 ; 6 et 4 dans `L2` ;
- on appuie sur la touche stats puis on appuie sur la flèche de droite pour se déplacer sur **CALC** ;
- on choisit **1:Stats 1-Var** puis on écrit `L1,L2` afin d'obtenir `Stats 1-Var L1,L2` et on valide avec entrer ;
- l'écart-type est `σx=.8454843287` donc $\sigma \approx 0,8$ (et la moyenne est $\overline{x} \approx 1,3125$).

Calculatrice CASIO

- On appuie sur la touche MENU et on choisit le menu **2 : STAT** ;
- on saisit les valeurs 0 ; 1 ; 2 et 3 dans `List 1` et les effectifs 4 ; 18 ; 6 et 4 dans `List 2` ;
- on choisit le menu **CALC** ;
- on règle `1Var XLIST` sur `List 1` et `1Var Freq` sur `List 2` puis on appuie sur la touche EXIT ;
- on choisit le menu `1VAR` ;
- l'écart-type est `σx =0.84548432` donc $\sigma \approx 0,8$ (et la moyenne est $\overline{x} \approx 1,3125$).

Remarques :

- La variance et l'écart-type sont des indicateurs de dispersion autour de la moyenne, plus ils sont petits, plus la série est homogène.
- Généralement, on détermine la variance et l'écart-type à l'aide de la calculatrice.

Remarque : La moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ s'expriment dans la même unité que les valeurs de la série **(analyse dimensionnelle)**.
Cela a un sens de parler des intervalles $[\overline{x}-\sigma\,;\,\overline{x}+\sigma]$, $[\overline{x}-2\sigma\,;\,\overline{x}+2\sigma]$, etc. qui sont souvent utilisés en statistiques.

Exemple Lors d'un TP ayant pour but de mesurer la masse volumique d'un métal, exprimée en g/cm^3, les sept groupes d'une classe ont trouvé :

7,95 ; 8,02 ; 7,61 ; 8,11 ; 8,02 ; 8,05 ; 8,04.

La calculatrice donne la moyenne $\overline{x} \approx 7{,}97$ g/cm^3 et l'écart-type $\sigma \approx 0{,}15$ g/cm^3 de cette série de valeurs.
L'intervalle $[\overline{x}-2\sigma\,;\,\overline{x}+2\sigma]$ est donc $[7{,}67\,;\,8{,}27]$ à 10^{-2} près, dont on peut remarquer qu'il contient 6 des 7 valeurs, soit $\frac{6}{7} \approx 86\,\%$ des valeurs.

3. Résumé d'une série statistique

MÉTHODE 6 Résumer une série statistique

► Ex. 30 p. 258

On peut résumer une série statistique, c'est-à-dire en donner une tendance globale, par :

- le couple médiane-écart interquartile, qui n'est pas sensible aux valeurs extrêmes : on le privilégie donc quand on étudie une série dont les valeurs extrêmes sont moins *importantes* ou moins *significatives* que les valeurs *centrales* ;
- le couple moyenne-écart-type, qui est sensible aux valeurs extrêmes : on le privilégie donc quand on étudie une série dont les valeurs extrêmes sont aussi *importantes* ou aussi *significatives* que les autres.

Dans les deux cas, on utilise un indicateur de position (la médiane ou la moyenne) et un indicateur de dispersion (l'écart interquartile ou l'écart-type).

Exercice d'application

Pour chacune des deux situations suivantes, dire s'il est préférable de résumer la série statistique correspondante par le couple médiane-écart interquartile ou par le couple moyenne-écart-type.

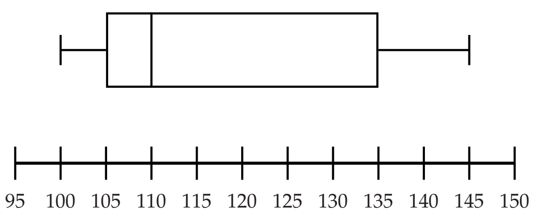
- **Situation 1 :** On étudie la série statistique des salaires et allocations chômage des Français en 2014 en vue d'en observer les inégalités.
- **Situation 2 :** On étudie les résultats d'une enquête d'un fabricant de chaussures portant sur la taille de chaussure de ses clients afin de déterminer la production de quelles pointures privilégier.

Correction

- Dans la situation 1, les valeurs extrêmes sont très importantes puisque ce sont elles qui illustrent les plus grandes inégalités : on préférera donc le couple moyenne-écart-type.
- Dans la situation 2, le fabricant souhaite savoir quelles pointures sont les plus portées et ne s'intéresse donc pas aux très petites et très grandes pointures peu portées par ses clients mais plutôt aux valeurs centrales : on préférera donc le couple médiane-écart interquartile.

Activités mentales

1 Déterminer l'intervalle et l'écart interquartile de la série représentée par le diagramme en boîte suivant.



2 Trouver la série de 5 valeurs dont :
- la médiane est 12 ;
- le maximum est 36 ;
- le premier quartile est 9 ;
- l'étendue est 34 ;
- l'écart interquartile est 15.

3 Déterminer l'écart-type de la série statistique suivante à l'aide de la calculatrice.

2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; 512 ; 512.

4 Déterminer l'écart-type de la série statistique suivante à l'aide de la calculatrice.

Valeur	6	7	8	9	10	12
Effectif	9	2	1	8	7	6

5 Déterminer une série de quatre valeurs dont l'écart-type est inférieur à l'écart interquartile.

6 Les moyennes trimestrielles d'un élève en mathématiques sont 11 ; 9 et 16.
Déterminer sa moyenne annuelle, puis la variance et l'écart-type de cette série de notes.

7 On considère deux séries :
- 5 ; 12 ; 1 ; 13 ; 2 ;
- 313 ; 312 ; 313 ; 314 ; 312 ; 311.

Sans calcul, deviner laquelle a le plus grand écart-type.

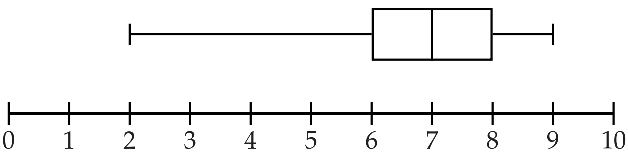
8 Simplifier $\sum_{i=1}^{5} x_i - \sum_{i=2}^{3} x_i$.

9 Simplifier $\sum_{i=7}^{12} n_i - \sum_{k=6}^{9} n_k$.

10 Trouver deux séries ayant même moyenne mais dont l'écart-type de la deuxième sera plus grand que celui de la première.

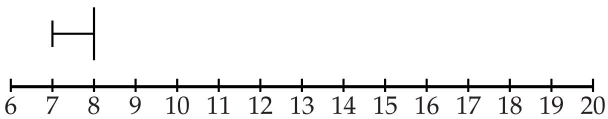
Diagramme en boîte

11 On considère une série statistique dont le diagramme en boîte est donné ci-dessous.



1) Lire le minimum, Q_1, la médiane, Q_3 et le maximum de cette série statistique.
2) En déduire l'intervalle interquartile.

12 Reproduire et compléter le diagramme en boîte ci-dessous de sorte que :
- l'étendue soit 11 ;
- la médiane soit 12 ;
- l'écart interquartile soit 5.



13 ► MÉTHODE 1 p. 250
Dans un supermarché, à la caisse « moins de 10 articles », on relève le nombre d'articles de 65 clients pris au hasard dans la journée.

Nombre d'articles	2	3	4	5	6	7	8	10
Nombre de clients	3	5	10	15	22	8	1	1

1) Déterminer les quartiles Q_1 et Q_3 et la médiane de cette série.
2) Tracer le diagramme en boîte de cette série statistique.

14 Loïc, 30 ans, a toujours aimé les jeux vidéo. Ces 10 dernières années, le nombre de jeux qu'il a acheté par an est donné par la série suivante, classée chronologiquement :

5 ; 6 ; 10 ; 11 ; 12 ; 7 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0.

1) Déterminer Q_1, Q_3 et la médiane de cette série.
2) Tracer le diagramme en boîte de cette série.
3) De quel phénomène important le diagramme en boîte ne rend-il pas compte ?
4) Proposer une représentation graphique rendant compte de ce phénomène.

S'entraîner

15 ► MÉTHODE 2 p. 251

Nicolas a deux classes de 1re S auxquelles il a donné exactement la même interrogation, notée sur 10.

Les résultats sont les suivants :

Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs 1re S 1	5	4	0	0	3	1	6	5	6	5
Effectifs 1re S 2	0	3	2	6	8	4	5	2	0	1

1) Déterminer le nombre d'élèves de chaque classe.

2) Tracer les diagrammes en boîtes des deux séries sur le même graphique.

3) Comparer les deux classes.

16 On considère deux séries statistiques, d'écart interquartile respectif e et $100e$.

1) Laquelle est la plus homogène ?

2) On considère :

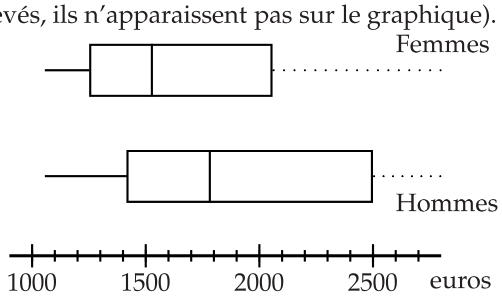
- la série des tailles des élèves de la classe, exprimées en m ;
- la série des tailles des élèves de la classe, exprimées en cm.

Démontrer que l'écart interquartile de la deuxième série est égal à 100 fois celui de la première (on pourra appeler $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les valeurs de la première série).

3) Que penser de la réponse à la question **1)** ? Quand on discute de l'homogénéité de deux séries à l'aide de l'écart interquartile, à quoi doit-on faire attention (plusieurs réponses possibles) ?

17 **Inégalité hommes-femmes**

On représente ci-dessous les diagrammes en boîte des séries des salaires nets mensuels des femmes et des hommes en France en 2010 (les salaires maximaux étant trop élevés, ils n'apparaissent pas sur le graphique).



1) Lire, avec la précision permise par le graphique, le couple médiane-écart interquartile pour les deux séries.

2) Interpréter les résultats de la question précédente.

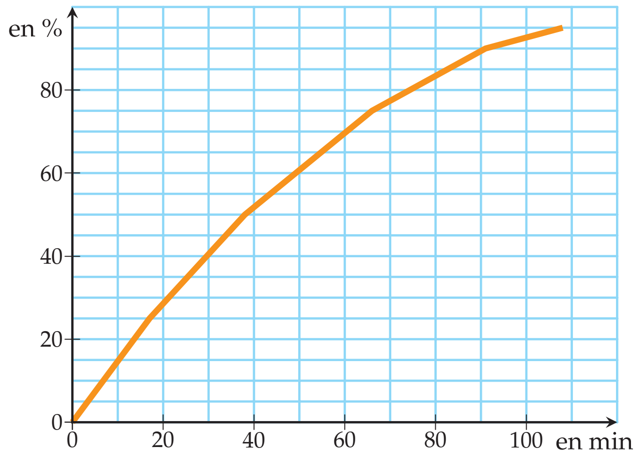
3) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- la différence entre les salaires médians d'un homme et d'une femme est d'environ 100 € ;
- plus de 75 % des femmes gagnent moins de 2 100 € par mois.

4) a) Calculer la différence de salaire entre une femme et un homme ayant chacun un salaire égal au troisième quartile de leurs séries respectives.

b) En pourcentage, combien cet homme gagne-t-il de plus que cette femme ?

18 On considère le diagramme des fréquences cumulées croissantes de la série des temps d'accès des français à un service de chirurgie cardiaque.



(*Source : Irdes*)

1) Quel pourcentage de la population a accès à un service de chirurgie cardiaque en moins de 30 minutes ?

2) Lire les quartiles et la médiane de la série.

3) Construire le diagramme en boîte de cette série (le maximum n'apparaît pas mais il est de 9 h et 54 min, on ne pourra donc pas le faire apparaître sur le diagramme en boîte).

4) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Environ 75 % des français ont accès à un service de chirurgie cardiaque en environ 66 min ou plus.

b) Il y a environ 50 min d'écart entre le temps d'accès des 25 % les plus proches et des 25 % les plus éloignés d'un service de chirurgie cardiaque.

19 ALGO

On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Liste des variables utilisées
  x : réel
  n,i : entiers
Traitement
  Demander n
  Donner à i la valeur de 1
  Tant que (i<n/4+1) faire
    Afficher "Saisir la valeur suivante"
    Demander x
    Donner à i la valeur de i+1
  Fin Tant que
Affichage
  Afficher x
  Afficher "J'espère que la série était ordonnée..."
```

1) Que fait cet algorithme ? En quoi pourrait-on l'améliorer ?
2) Le modifier pour qu'il affiche le troisième quartile.

20 ALGO

En vous inspirant de l'exercice **19**, écrire un algorithme donnant la médiane d'une série statistique ordonnée.

21 On considère l'algorithme ci-dessous. ALGO

```
Liste des variables utilisées
  L : liste
  n,i : entiers
Traitement
  Demander L(1)
  Demander n
  Pour i variant de 2 à n faire
    Demander L(i)
    Si ...... Alors
      Afficher "Votre série n'est pas ordonnée"
    Fin Si
  Fin Pour
```

Compléter les pointillés pour que cet algorithme, en plus de permettre à un utilisateur de rentrer les valeurs d'une série dans une liste, vérifie à chaque étape si la série est bien ordonnée.

Moyenne et écart-type

22 On a relevé que l'écart-type de température dans la partie centrale d'un frigo est moins élevé que dans sa porte. Où vaut-il alors mieux conserver les œufs qui ont besoin d'une température la plus constante possible ?

23 ► MÉTHODE 3 p. 252 ► MÉTHODE 4 p. 253

Au cours des championnats du monde de basket féminin 2014, lors des matches qu'elle a joué :

- la joueuse serbe Ana Dabovic a inscrit 12, 24, 6, 21, 2, 11 et 19 points ;
- la joueuse américaine Maya Moore a inscrit 15, 17, 16, 10, 16 et 18 points.

1) Calculer le nombre de points marqués lors de ces championnats par chacune des joueuses.
2) Calculer la moyenne et l'écart-type du nombre de points marqués pour chacune (arrondir à 10^{-2} près).
3) Contrôler les résultats à l'aide de la calculatrice.
4) D'après la question précédente, quelle joueuse a été la plus efficace ? la plus régulière ?

24 ► MÉTHODE 3 p. 252 ► MÉTHODE 5 p. 253

Boujémaa a décidé de relever le nombre de fruits et légumes qu'il mange par jour pendant un mois.

Les résultats sont donnés ci-dessous.

Nombre de fruits et légumes	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de jours	1	1	2	10	8	7	1

1) Calculer combien il a mangé de fruits et légumes par jour en moyenne pendant ce mois ainsi que l'écart-type correspondant. On arrondira à $0,1$ près.
2) Contrôler les résultats à l'aide de la calculatrice.

25 **Résumer n'est pas (vraiment) décrire**

1) Dans un groupe de cinquante amis, quarante reçoivent 15 € d'argent de poche par mois et dix reçoivent 40 €. Déterminer la moyenne et l'écart-type de la série des argents de poche.
2) Même question avec quarante amis qui reçoivent 25 € et dix qui reçoivent 0 €.
3) Même question avec un groupe de quarante amis dont vingt reçoivent 10 € et vingt reçoivent 30 €.
4) Peut-on affirmer : « deux séries qui ont même moyenne et écart-type ont la même structure ».

S'entraîner

26 On a relevé les températures mensuelles moyennes à Marseille (en °C) et San Francisco (en °F) durant l'année 2013 (*Source : infoclimat*). On a obtenu :

- Marseille : 6,2°C ; 5,5°C ; 10,6°C ; 13,4°C ; 15,8°C ; 21,2°C ; 25,8°C ; 24,7°C ; 21,1°C ; 19°C ; 10,6°C et 8,8°C ;
- San Francisco : 58,2°F de moyenne et 5,6°F d'écart-type.

1) Déterminer l'écart-type et la moyenne des températures à Marseille.

2) Dans quelles unités sont exprimées les moyennes et l'écart-type ?

3) Pourquoi est-il difficile de comparer les deux séries ?

4) On souhaite cependant savoir dans quelle ville il y a le moins d'écart entre les températures.
Pour cela, on utilise le coefficient de variation défini par $\dfrac{\text{écart-type}}{\text{moyenne}}$.
Plus ce coefficient est petit, plus la série est homogène.
Calculer le coefficient de variation de chaque série et conclure quant à la question posée.

27 ALGO

Compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule et affiche la moyenne des valeurs d'une série, rentrées par l'utilisateur.

```
Liste des variables utilisées
  x,m : réels
  n : entier
Traitement
  Demander n
  Donner à m la valeur de 0
  Pour i variant de 1 à n faire
    Demander x
    Donner à m la valeur de ........
  Fin Pour
Affichage
  Afficher m
```

28 ALGO

Écrire un algorithme permettant à un utilisateur de saisir les valeurs d'une série dans une liste et d'en calculer l'écart-type.

Résumé d'une série statistique

29 Dans une entreprise, la répartition des salaires mensuels est la suivante :

1 467 € ; 1 524 € ; 1 726 € ; 1 024 € ; 1 874 € ; 2 167 €.

1) Calculer les couples médiane-écart interquartile et moyenne-écart-type.

2) Le plus haut salaire de l'entreprise obtient une augmentation de 500 €. Reprendre la question **1)** avec ce nouveau salaire.

3) Quel phénomène les deux premières questions illustrent-elles ?

30 ► MÉTHODE 6 p. 254

Gani postule pour un poste à salaire intermédiaire dans une entreprise, il souhaite donc se renseigner sur sa politique salariale.

Il trouve des résumés de la série des salaires dans cette entreprise sur internet :

- le couple médiane-écart interquartile est $(1689; 353)$;
- le couple moyenne-écart-type est $(2087; 1153)$.

1) Lequel de ces deux couples lui apporte les informations les plus intéressantes dans sa situation ?

2) Donner une explication possible à une telle disparité dans les deux couples résumant la série.

31 Dans une communauté de communes rurales, on a relevé le nombre d'habitants par commune en 2004 et en 2014. On observe que :

- la médiane et l'écart interquartile sont quasi inchangés ;
- la moyenne est restée constante à environ 1 200 habitants mais l'écart-type est passé d'environ 500 à 700 ;
- il y a toujours environ le même nombre d'habitants dans cette communauté de communes.

1) À leur publication, le maire de la plus grosse commune se félicite des résultats. En donner une raison possible.

2) Quel(s) indicateur(s) ou graphique(s) permettrai(en)t d'avoir une vision plus précise de la situation ?

Problèmes

32 **D'après BAC**

Le directeur d'une école de journalisme cherche à comparer ses deux dernières promotions. Il obtient :

	Promotion 2013		Promotion 2014	
	Français	Histoire	Français	Histoire
Moyenne	11	12	11	12,5
Écart-type	2,5	2,3	1,8	3,0
Minimum	6	7	7	6
Q_1	9	10	10	10
Médiane	11	12	11	13
Q_3	13	14	12	14
Maximum	16	17	15	19

1) a) Tracer les diagrammes en boîte de ces quatre séries sur le même graphique.

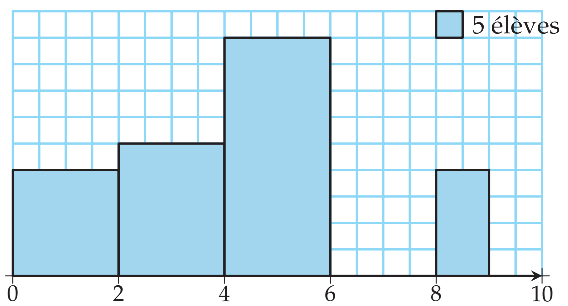
b) Comparer les résultats en français et histoire de chacune des promotions.

c) Comparer les résultats en français, puis en histoire d'une promotion sur l'autre.

2) Les résultats précédents sont-ils confirmés par le couple moyenne-écart-type ?

33 Dans un lycée, on a interrogé 400 élèves sur le prix de leur téléphone portable.

Les résultats sont regroupés dans l'histogramme ci-dessous dont l'axe horizontal est gradué en centaines d'euros.



1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Prix en centaines d'€	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[8 ; 9[
Effectifs				
Fréquences				

2) Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes correspondant à cette série.

Dans la suite, toutes les valeurs seront données en euros.

3) a) Lire les quartiles et la médiane.

b) Calculer l'écart interquartile.

c) Tracer le diagramme en boîte.

4) Calculer la moyenne et l'écart-type. Pour cela, on assimilera chaque classe à la moyenne de ses bornes.

5) Du couple moyenne-écart-type et médiane-écart interquartile, quel résumé intéressera le plus :

- un fabricant de portable milieu de gamme cherchant à fixer le prix de son prochain modèle ?
- un organisme étudiant les disparités d'équipement entre les différents élèves ?

34 **D'après BAC**

Un apiculteur amateur fait le bilan en 2008 de la production de miel de ses ruches. Pour chacune d'elles, il note la quantité de miel produite (en kg).

Il obtient les résultats ci-dessous.

Production de miel (en kg)	18	20	21	22	23	24	26	28
Nombre de ruches	2	4	4	3	1	3	1	3

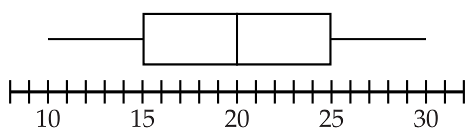
1) Déterminer la médiane et les quartiles de cette série.

2) Calculer la quantité totale de miel produite.

3) Calculer la production moyenne par ruche (arrondir au dixième).

4) Tracer le diagramme en boîtes de cette série.

5) L'apiculteur a retrouvé le diagramme en boîtes qu'il avait établi pour l'année 2007.



a) Reproduire ce diagramme en boîtes au-dessus du précédent.

b) En 2007, à quel pourcentage peut-on estimer la part du nombre de ruches ayant produit 25 kg ou plus de miel ? 20 kg ou moins de miel ?

c) À l'aide des deux diagrammes en boîte, comparer les productions des deux années.

Approfondir

35 Avec des sommes

1) Écrire $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)$ sous forme de deux sommes.

2) Soit a un réel.

a) Simplifier $\sum_{i=1}^{n} a$.

b) Écrire $\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)$ puis $\sum_{i=1}^{n} ax_i$ en fonction de $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

36 Une nouvelle formule

On considère la série suivante, de moyenne $\overline{x}$ et d'effectif total n.

Valeur	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

1) Rappeler la formule de la variance V de cette série.

2) Montrer que $V = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2$.

37 Questions de linéarité

1) a) Quand on ajoute un même nombre a à toutes les valeurs d'une série statistique, que devient la moyenne ? Justifier.

b) Quand on ajoute un même nombre a à toutes les valeurs d'une série statistique, que devient l'écart-type ? Justifier.

2) a) Quand on multiplie toutes les valeurs d'une série statistique par un même nombre positif b, que devient la moyenne ? Justifier.

b) Quand on multiplie toutes les valeurs d'une série statistique par un même nombre positif b, que devient l'écart-type ? Justifier.

3) a) Pour demain, le professeur de Jérémy l'a mis au défi de trouver une série de valeurs de moyenne 13 et d'écart-type 2.

Jérémy a choisi des valeurs au hasard et a obtenu, sur cette série, une moyenne de 12 et un écart-type de 3.

Il décide de multiplier et/ou ajouter un même nombre à toutes ces valeurs afin de répondre au problème posé. Comment s'y prend-il ?

b) Les valeurs après modification sont-elles forcément supérieures à celles qui leur correspondent avant modification ? Si non, précisez pour lesquelles ce n'est pas le cas.

38 Minimisation de distance

On considère une série de n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

1) Écrire le carré de la distance entre une valeur x_i de cette série et un nombre x.

2) En déduire que la moyenne des carrés des distances entre x_i et x pour i variant de 1 à n est :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2.$$

Dans la suite on considérera la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2$.

3) Montrer que $f'(x) = 2x - 2\overline{x}$ où $\overline{x}$ est la moyenne de la série $x_1, x_2, \dots, x_n$.

4) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

5) Comment appelle-t-on le minimum de la fonction f et pour quelle valeur de x est-il atteint ?

39 Estimation en sciences expérimentales

En sciences expérimentales, on cherche parfois à estimer une grandeur en la mesurant n fois expérimentalement et en calculant la moyenne $\overline{x}$ des valeurs obtenues, qui fournit alors une estimation de la grandeur cherchée.

On sait que pour $n \geqslant 10$, il y a 95 % de chance que la valeur de la grandeur cherchée soit dans l'intervalle de confiance :

$$\left[\overline{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n-1}} ; \overline{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n-1}}\right]$$

où σ est l'écart-type de la série des résultats expérimentaux obtenus.

1) On souhaite connaître la période propre T_0 d'un pendule simple.

Pour cela, on réalise 10 mesures et on obtient :

1,797 s ; 1,813 s ; 1,810 s ; 1,833 s ; 1,802 s ; 1,802 s ; 1,827 s ; 1,805 s ; 1,778 s ; 1,817 s.

Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série de valeurs.

2) En déduire l'intervalle de confiance à 95 % de la période du pendule. On arrondira les bornes à 10^{-4} près.

3) Déterminer un intervalle de confiance à 95 % sur la longueur ℓ de ce pendule sachant que $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

On pourra prendre $g \approx 9,807$ m/s^2.

40 Soit p un entier naturel non nul.

1) Donner, en fonction de p, le rang des premier et troisième quartiles et de la médiane d'une série statistique dans le cas où :

- l'effectif total est $4p$;
- l'effectif total est $4p+1$;
- l'effectif total est $4p+2$;
- l'effectif total est $4p+3$.

2) En déduire le rang des premier et troisième quartiles et de la médiane d'une série statistique d'effectif total 4 443.

41 Plage de normalité, d'après BAC

Quand on représente une série statistique par un diagramme en bâtons ou un histogramme et que celui-ci est quasi symétrique en forme de cloche, on peut penser que les données sont gaussiennes.
Dans ce cas, environ 95 % des valeurs se trouvent dans l'intervalle $[\overline{x}-2\sigma\,;\,\overline{x}+2\sigma]$, appelé plage de normalité au niveau de confiance de 95 %.

Un fabricant de pellicules photographiques a fait mesurer la sensibilité (sur l'échelle ISO) d'un échantillon de 1 000 pellicules prélevées dans sa production.
Il obtient les résultats suivants :

Sensibilité	340	350	360	370	380	390	400
Effectif	3	8	12	41	99	195	285

Sensibilité	410	420	430	440	450	460
Effectif	193	98	43	12	9	2

1) Représenter cette série par un diagramme en bâtons.

2) Que peut-on penser du type de données de cette série ?

3) Déterminer l'intervalle $[\overline{x}-2\sigma\,;\,\overline{x}+2\sigma]$.

4) Quel pourcentage des valeurs appartient à cet intervalle ? Est-ce cohérent avec le modèle proposé à la question **2)**.

42 Droite des moindres carrés INFO

Lors d'un TP de SVT, on souhaite mettre en évidence une relation entre la fréquence cardiaque (FC) d'un individu, exprimée en pulsations par minute, et son volume de dioxygène consommé par minute (VO_2), exprimé en litres par minute.
Pour cela, chaque élève réalise une série de quatre mesures après différents efforts plus ou moins intenses.

Michel obtient les résultats suivants :

FC	59	83	105	132
VO_2	0,56	1,02	2,12	2,43

On note $x_1 = 59$; $x_2 = 83$; etc. et $y_1 = 0{,}56$; $y_2 = 1{,}02$; etc.

1) a) Placer, pour i allant de 1 à 4, les points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère. On prendra :

- 1 cm pour 10 pulsations par minute en abscisse, en commençant à graduer à 50 ;
- 1 cm pour 0,4 litre par minute en ordonnée.

b) Tracer grossièrement une droite (d'équation $y = ax+b$) approximant les points.
Pour chacun des points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$, matérialiser par des segments verticaux la distance $|y_i-(ax_i+b)|$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'équation de la meilleure droite d'« approximation » possible, appelée droite des moindres carrés.
C'est la droite d'équation $y = ax+b$ pour laquelle $D = \sum_{i=1}^{4} |y_i-(ax_i+b)|^2 = \sum_{i=1}^{4} (y_i-(ax_i+b))^2$ est minimale.

2) Exprimer D en fonction de a et b (on ne cherchera pas à développer).

3) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient que
$$D = 38819a^2 + 758ab - 1322,12a + 4b^2 - 12,26b + 11,7533.$$

a) On considère la fonction f telle que $f(a) = D$.
Montrer que f atteint son minimum quand :
$$77638a = -758b + 1\,322{,}12.$$

b) On considère la fonction g telle que $g(b) = D$.
Montrer que g atteint son minimum quand :
$$b = 1{,}532\,5 - 94{,}75a.$$

c) Résoudre le système :
$$\begin{cases} 77638a = -758b + 1\,322{,}12 \\ b = 1{,}532\,5 - 94{,}75a \end{cases}.$$

d) On admet (sauriez-vous le démontrer ?) que si le système précédent admet un couple solution, alors D est minimale pour ces valeurs de a et b.
En déduire l'équation de la droite des moindres carrés (on arrondira les coefficients à 10^{-3} près).

4) Déterminer le VO_2 max de Michel, c'est-à-dire sa consommation maximale de dioxygène, à plein effort, quand son cœur bat à 205 pulsations par minute.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Construire et interpréter un diagramme en boîte
- en déterminant le maximum et le minimum
- en calculant médiane et quartiles

Calculer un écart-type
- avec la formule quand il y a peu de valeurs
- avec la calculatrice d'une manière générale

Comparer l'homogénéité de deux séries
- avec un diagramme en boîte ou l'écart interquartile
- avec l'écart-type

Résumer une série
- par le couple médiane-écart interquartile
- par le couple moyenne-écart-type

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On s'intéresse au nombre de buts marqués par deux joueurs du F.C. Barcelone, Nikola Karabatic et Siarhei Rutenka, lors de la ligue des champions de handball 2013-2014.
La série du nombre de buts par match par Karabatic est donnée par le tableau ci-dessous.

Nombre de buts	1	3	4	5	6	7
Nombre de matchs	1	3	5	3	1	3

43 La moyenne de but inscrits par Karabatic est :

(a) 4,5 (b) environ 4,3

44 L'écart-type de Karabatic, arrondi à 10^{-2} près est :

(a) 2,16 (b) 1,67 (c) 1,62 (d) 1,97

45 La médiane de Karabatic est :

(a) 4 (b) 4,5 (c) 5

La série du nombre de buts marqués par match par Rutenka est :

$$8 ; 3 ; 0 ; 8 ; 8 ; 7 ; 2 ; 6 ; 5 ; 3 ; 1 ; 2 ; 5 ; 4 ; 11.$$

46 L'écart-type de Rutenka, arrondi à 10^{-2} près est :

(a) 3,11 (b) 3,12 (c) 3 (d) 3,01

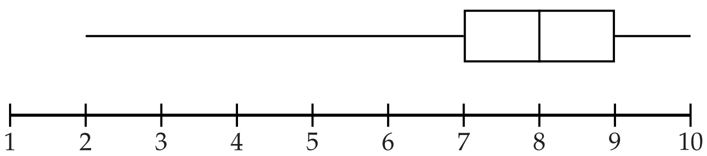
47 L'écart interquartile de Rutenka est :

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

48 De Karabatic et Rutenka, le joueur le plus régulier est :

(a) Karabatic (b) Rutenka

On considère le diagramme en boîte représenté ci-dessous.



49 Le minimum est :

ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ on ne peut pas savoir

50 L'effectif de la série est :

ⓐ 9 ⓑ 10 ⓒ on ne peut pas savoir

51 Le troisième quartile est :

ⓐ 7 ⓑ 8 ⓒ 9 ⓓ 10

52 La série statistique correspondante est :

ⓐ

Valeur	2	5	6	7	8	9	10
Effectif	5	8	9	6	11	3	1

ⓑ

Valeur	2	5	6	7	8	9	10
Effectif	12	2	3	7	20	15	16

On a relevé le temps de guérison chez 100 personnes enrhumées.

Nombre de jours	2	3	4	5	6	7
Effectif	1	11	25	33	23	7

53 Le couple moyenne-écart-type, arrondi éventuellement à 0,01 près, est :

ⓐ (5 ; 2) ⓑ (2 ; 5) ⓒ (1,13 ; 4,87) ⓓ (4,87 ; 1,13)

54 Afin de tester un médicament, on a relevé le temps de guérison chez 100 personnes enrhumés l'ayant pris pour traitement.

Nombre de jours	1	2	3	4	5	6
Effectif	9	32	36	10	5	8

On considère que le médicament est efficace si le troisième quartile de la série des « traités » est inférieur au premier quartile de la série des « non traités ».

Le médicament est :

ⓐ efficace ⓑ non efficace ⓒ on ne peut pas savoir

Travaux pratiques

TP 1 Quartiles dans le métro

INFO

Le but de ce TP est de *discuter*, sur deux exemples, le fait que le minimum, Q_1, la médiane, Q_3 et le maximum séparent une série statistique en quatre sous-séries regroupant chacune environ 25 % des valeurs.

Pour cela, on s'intéresse aux différentes stations de métro de Paris et sa banlieue, selon deux critères : le nombre de correspondances qu'a chaque station avec le reste du réseau Ratp et le nombre d'entrants dans chaque station par an.

Ouvrir la feuille de tableur `TP_ratp` (source : `http://data.ratp.fr/fr/les-donnees.html`)

1 Nombre de correspondances

1) Combien de stations de métro y a-t-il ?

2) a) Saisir `=MIN(C2:C304)` dans la cellule `F2`.

b) Saisir `=QUARTILE(C2:C304;1)` (le 1 dans la formule indique qu'on souhaite le 1er quartile) dans la cellule `F3`.

c) Saisir `=MEDIANE(C2:C304)` dans la cellule `F4`

d) Compléter de même les cellules `F5` et `F6`.

3) Que remarque-t-on ?

4) a) Sélectionner la plage `A2:C304` puis `Données>Trier` et exécuter un tri croissant par rapport à la colonne `C`.

b) Combien y a-t-il de valeurs dans l'« intervalle » $[\text{min}; Q_1]$ pour cette série du nombre de correspondances ?
Quel pourcentage des valeurs de la série cela représente-t-il ?

c) Compléter le tableau suivant :

Intervalle	$[\text{min} ; Q_1]$	$[Q_1 ; \text{méd}]$	$[\text{méd} ; Q_3]$	$[Q_3 ; \text{max}]$
Pourcentage de valeurs dans l'intervalle				

d) Est-ce proche du résultat attendu ? Expliquer.

2 Nombre d'entrants

1) Compléter les cellules `F9` à `F13` à l'aide des formules tableur.

2) Effectuer un tri croissant et donner le nom de la station correspondant à la médiane.

3) Compléter le tableau suivant pour cette série des nombres d'entrants par station.

Intervalle	$[\text{min} ; Q_1]$	$[Q_1 ; \text{méd}]$	$[\text{méd} ; Q_3]$	$[Q_3 ; \text{max}]$
Pourcentage de valeurs dans l'intervalle				

3 Conclusion

En comparant les deux tableaux, discuter la ou les raisons des différences de répartitions des valeurs entre les indicateurs (minimum, Q_1, etc.) dans les deux séries.

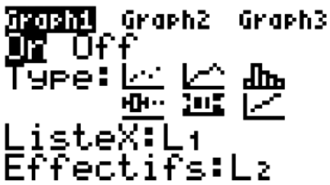
TP 2 Des boîtes dans la calculatrice

CALC

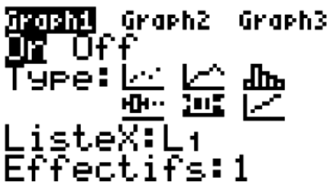
Le but de ce TP est d'apprendre à tracer un diagramme en boîte sur l'écran de la calculatrice.

Calculatrice TI

- On appuie sur la touche stats ;
- on choisit le menu **1:Edite...** ;
- on saisit les valeurs de la série dans `L1` et, si besoin, les effectifs dans `L2` ;
- on appuie sur 2nde f(x) afin de sélectionner **graph stats** puis on valide **1:Graph1** et on règle l'écran (`Type`, `ListeX` et `Effectifs`)
  - comme ceci si l'on a rempli une liste d'effectifs :



  - comme cela sinon :

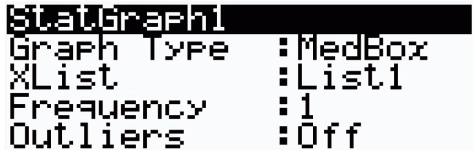


  - on appuie sur graphe (si le diagramme n'apparaît pas, on réglera le zoom sur **ZoomStat**).

Calculatrice CASIO

- On appuie sur la touche MENU et on choisit le menu **2 : STAT** ;
- on saisit les valeurs dans `List 1` et, si besoin, les effectifs dans `List 2` ;
- on choisit le menu **GRAPH** puis **SET** ;
- on se déplace ensuite sur **Graph Type**, **Xlist**, etc. afin de les régler
  - comme ceci si l'on a rempli une liste d'effectifs :

  - et comme cela sinon :



;

- on appuie sur la touche EXIT ;
- on appuie sur **GPH1**.

1) a) Tracer sur l'écran de votre calculatrice le diagramme en boîte représentant la série.

Valeur	2	5	17	19	22	51
Effectif	5	6	10	2	8	9

b) Lire approximativement l'écart interquartile de la série sur l'écran de la calculatrice (on pourra aller voir dans les réglages de la fenêtre à combien correspond une graduation horizontale, `Xgrad` ou `scale`, ou modifier soi-même cette valeur ainsi que la fenêtre pour faciliter la lecture).

c) Cet écart interquartile est-il supérieur ou inférieur à la moitié de l'étendue de la série ?

2) a) Tracer sur l'écran de votre calculatrice le diagramme en boîte représentant la série :

12 ; 8 ; 75 ; 87 ; 5 ; 12 ; 97 ; 33 ; 61 ; 15

b) Lire approximativement l'écart-interquartile sur l'écran de la calculatrice.

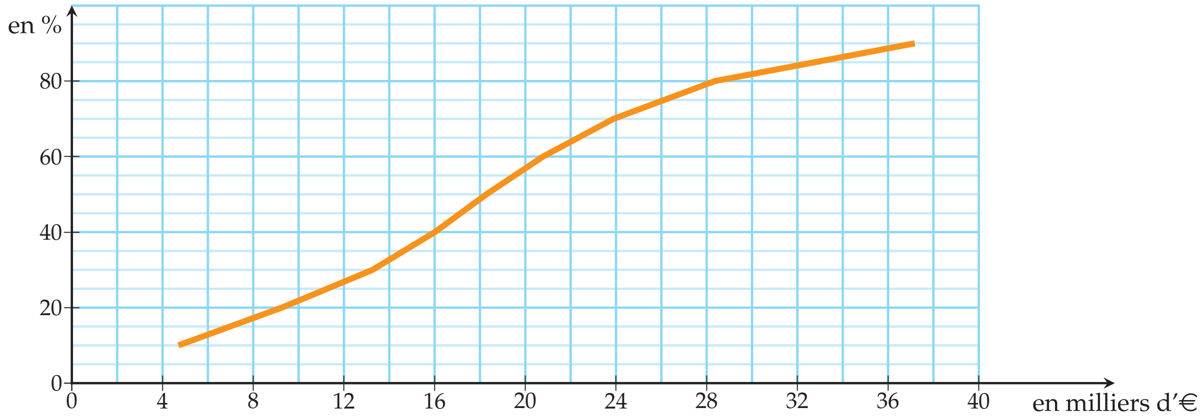
TP 3 Autour du seuil de pauvreté

CALC

Dans ce TP, on utilisera pour définition du seuil de pauvreté : « la moitié du salaire médian ».

1 Répartition des salaires et allocations chômage

On donne le graphique des fréquences cumulées croissantes des salaires et allocations chômage annuels des Français vivant en France métropolitaine en 2011 (*Source : Insee*).



1) Lire sur ce graphique les premier et troisième quartiles et la médiane de cette série des salaires et allocations chômage des Français vivant en France métropolitaine en 2011.

2) a) Déterminer le salaire médian de la population.

b) Quel pourcentage de la population vivait en dessous du seuil de pauvreté en 2011 ?

3) On souhaite tracer le diagramme en boîte correspondant à la série.

a) Pourquoi n'est-ce pas possible avec les données à notre disposition ?

b) Il existe un deuxième type de diagramme en boîte dont les extrémités ne sont pas le minimum et le maximum mais les premier et neuvième déciles D_1 et D_9, c'est-à-dire *l'équivalent* des quartiles mais pour respectivement 10 % et 90 %.
Déterminer D_1 et D_9 puis tracer ce diagramme en boîte.

2 Une révolution contre la pauvreté

Sur une île isolée, il y a 2 001 habitants :

- 1 000 physiciens ayant un salaire de 4 000 € par mois ;
- 1 000 mathématiciens ayant un salaire de 10 000 € par mois ;
- 1 roi ayant un salaire de 20 000 € par mois.

1) a) Déterminer le salaire moyen et l'écart-type de cette population à l'aide de la calculatrice.

b) Déterminer le seuil de pauvreté dans cette population puis le pourcentage d'habitants vivant sous ce seuil de pauvreté.

2) Excédée par la situation, la population gronde, poussant le roi à partir en exil.
Reprendre la question **1)** avec la nouvelle population :

- 1 000 physiciens ayant un salaire de 4 000 € par mois ;
- 1 000 mathématiciens ayant un salaire de 10 000 € par mois.

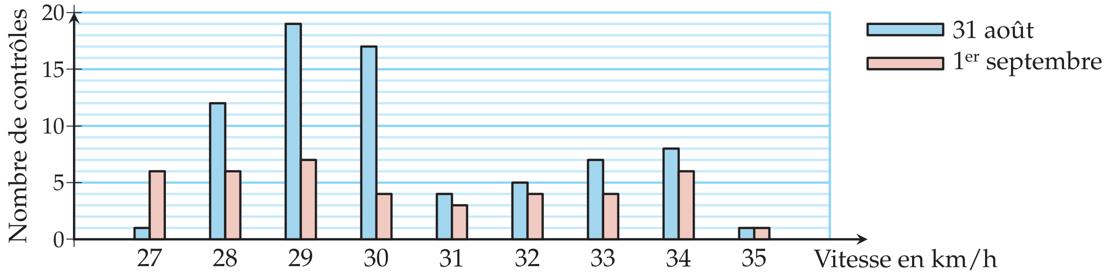
3) a) Semble-t-il y avoir un lien important entre le couple moyenne-écart-type et le seuil de pauvreté ?

b) Expliquer pourquoi dans ce cas précis.

TP 4 Contrôles de vitesse

INFO CALC

Les 31 août et 1er septembre 2014, de 13 h à 14 h, on a procédé à des contrôles de vitesse dans une zone limitée à 30 km/h. Les résultats sont donnés par le diagramme en bâtons ci-dessous.



On analyse ces résultats de façon à savoir quel jour les automobilistes ont été les plus responsables.

1) Le couple médiane-écart interquartile permettrait-il un bon résumé de la série ? Expliquer.

2) **a)** Déterminer le couple moyenne-écart-type de chacune des séries à l'aide de la calculatrice.

b) Peut-on affirmer alors que les automobilistes ont été beaucoup plus responsables un jour que l'autre ?

3) Ouvrir le fichier `controle_vitesse` ou recopier la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	Vitesse	Effectifs du 31/08	Fréquences du 31/08	Effectifs du 01/09	Fréquences du 01/09
2	27				
3	28				
4	29				
5	30				
6	31				
7	32				
8	33				
9	34				
10	35				

a) Compléter les colonnes des effectifs et saisir des formules en `B11` et `D11` permettant d'obtenir les effectifs totaux.

b) Saisir une formule en `C2` et la recopier vers le bas afin de compléter la colonne `C`.

c) Saisir une formule en `E2` et la recopier vers le bas afin de compléter la colonne `E`.

d)
- Pour Openoffice ou Libreoffice : Sélectionner simultanément les plages `A1:A10` ; `C1:C10` et `E1:E10` puis `Insertion>Diagramme>Colonne`. Sélectionner `Séries de données en colonnes` ; `Première ligne comme étiquette` et `Première colonne comme étiquette`.
- Pour Excel : Sélectionner simultanément les plages `C1:C10` et `E1:E10` puis `Insertion>Colonne>Histogramme2D` puis `Sélectionner des données` et, dans `Etiquettes de l'axe horizontal>Modifier`, sélectionner la plage `A2:A10`.

e) Que permet de « corriger » ce diagramme en bâtons par rapport à celui donné en énoncé.

f) Discuter votre réponse à la question **2)c)** avec ce nouveau diagramme en bâtons.

Travaux pratiques

Récréation, énigmes

Tout est relatif

Une association de consommateurs a mené une étude sur le prix d'un article dans une grande surface :

- pendant tout le mois de janvier, cet article coûtait 12 € ;
- pendant tout le mois de février, cet article coûtait 10 €.

L'association de consommateurs annonce dans son magazine que, sur cette période, l'article coûtait en moyenne 11,05 €. La grande surface, mécontente, affirme que l'article coûtait en moyenne 11 €. Qu'en pensez-vous ?

Retrouver ses notes

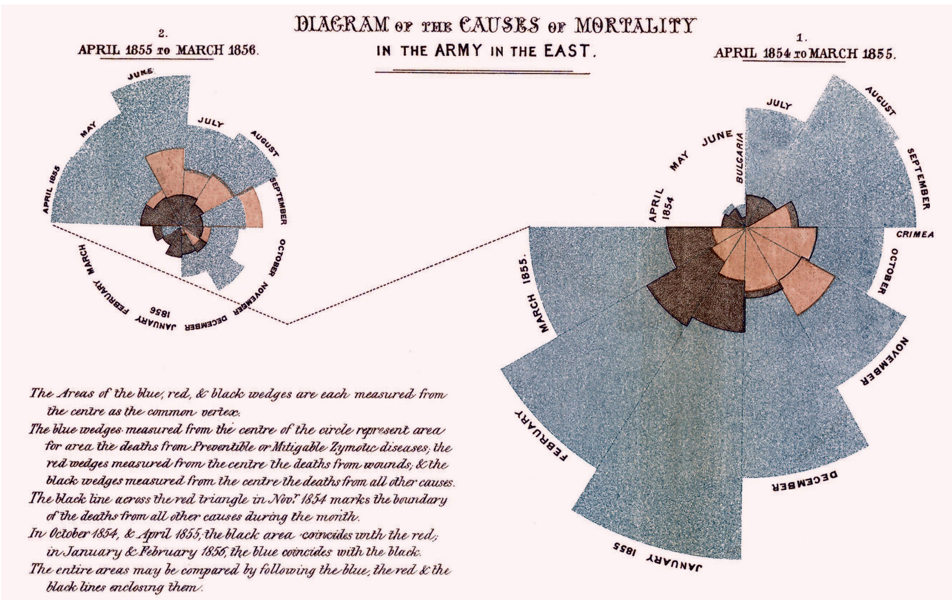
- J'ai entendu dire que tu avais eu 12,5 de moyenne en maths ce trimestre mais tu as eu quoi, comme notes ?
- Je ne sais plus exactement mais je sais que, sur mes trois notes, une était le double de l'autre et le prof m'a dit qu'il fallait que je gagne en régularité car ma variance était de $\frac{133}{6}$.

Quelles sont les notes de cet élève ?

Un beau graphique...

...vaut mieux qu'un long discours ! Et cela, Florence Nightingale (1820-1910) l'a bien compris.

Cette infirmière et statisticienne a développé le type de graphique ci-dessous, qui lui permettait d'illustrer ses travaux statistiques afin qu'ils soient plus facilement compris par ses interlocuteurs.



Le graphique précédent figure dans un rapport de 1858 adressé à la reine Victoria. Il met en évidence les différentes causes de décès dans l'armée britannique lors de la guerre de Crimée, mesurées en partant du centre du graphique, classées en trois catégories :

- les morts par maladies évitables ou guérissables en bleu-gris ;
- les morts par blessures en rose ;
- les morts par d'autres causes en noir.

Pour plus de précisions, on pourra lire le texte qui accompagne le graphique !

Probabilités : variables aléatoires

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Connaître le vocabulaire : expérience aléatoire, univers, issues, événements
- Reconnaître une situation d'équiprobabilité
- Énoncer la loi des grands nombres
- Comprendre et interpréter : une réunion d'événements, une intersection d'événements
- Utiliser un arbre, un tableau à double entrée ou un diagramme

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Auto-évaluation

1 A et B sont deux événements tels que :

$P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$.

Calculer $P(A \cup B)$.

2 A et B sont deux événements tels que :

$$P(A) = \frac{1}{3} \text{ ; } P(B) = \frac{1}{4} \text{ et } P(A \cup B) = \frac{1}{2}.$$

Calculer $P(A \cap B)$.

3 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

A : « Obtenir un as » ;

B : « Obtenir un pique » ;

C : « Obtenir une carte rouge ».

Calculer les probabilités des événements :

A ; B ; C ; $B \cap C$; $\overline{B}$; $A \cup C$.

4 Une personne a oublié le code d'un cadenas composé de 4 chiffres. Elle se souvient que les chiffres sont entre 0 et 4 et sont tous différents.

Combien y a-t-il de possibilités ?

5 Un club comprend 250 adhérents qui pratiquent une ou plusieurs activités.

- 60 personnes pratiquent le yoga ;
- 90 personnes pratiquent la danse ;
- 35 pratiquent le yoga et la danse.

On choisit au hasard la fiche d'un adhérent.

On considère les événements :

D : « L'adhérent pratique la danse » ;

Y : « L'adhérent pratique le yoga ».

1) Donner $P(D)$, $P(Y)$ et $P(D \cap Y)$.

2) Calculer $P(D \cup Y)$ et $P\left(\overline{D \cup Y}\right)$.

6 Le digicode de l'entrée d'un immeuble comporte trois chiffres suivis d'une lettre.

1) Quel est le nombre de combinaisons possibles ?

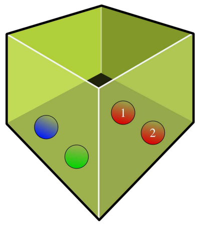
2) a) Un visiteur a oublié la lettre du code. Combien de combinaisons possibles devra-t-il essayer ?

b) Calculer la probabilité que ce visiteur ouvre la porte du premier coup.

Voir solutions p. 333

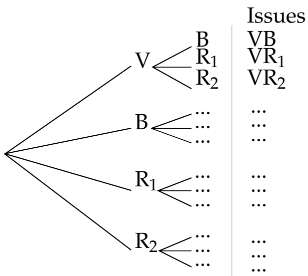
Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Ne perd pas la boule...



Une urne comprend une boule verte (V), une boule bleue (B) et deux boules rouges (R_1 et R_2).
On tire au hasard une boule, puis une deuxième sans avoir remis la première.

1) Recopier et compléter l'arbre ci-contre afin de déterminer toutes les issues possibles.



2) Quelle est la probabilité de chaque issue ?

3) Une boule bleue ne rapporte rien et ne fait rien perdre, une boule verte rapporte 2 points et chaque boule rouge fait perdre 1 point.
On s'intéresse au gain algébrique X (positif ou négatif) que peut obtenir un joueur à ce jeu.

a) Quelles sont les valeurs possibles pour le gain ?

b) Recopier et compléter le tableau.

Événement	$(X=-2)$	$(X=-1)$	$(X=1)$	$(X=2)$
Issues favorables				

c) Calculer la probabilité, notée $P(X=-2)$, que le joueur perde 2 euros.

d) Calculer de même $P(X=-1)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.

ACTIVITÉ 2 Lancer de deux dés

ALGO INFO

Un jeu consiste à lancer n fois deux dés parfaitement équilibrés.
Lorsqu'on obtient un double, on gagne 5 euros. Sinon on perd 1 euro.

```
Algorithme : Simulation
Variables : n, i, R, S, G : entiers
Traitements :
Lire n
G prend la valeur 0
Pour i variant de 1 à n faire
   R prend la valeur Entieraléatoire(1 ; 6)
   S prend la valeur Entieraléatoire(1 ; 6)
   Si R = S = 0 alors
      G prend la valeur G + 5
      Sinon
      G prend la valeur G - 1
   Fin Si
   Fin Pour
Affichage
   Afficher G/n
Fin de l'algorithme
```

1) On considère l'algorithme ci-dessus.

a) Qu'affiche cet algorithme ?

b) Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou un logiciel.
Effectuer plusieurs simulations pour $n = 10$; $n = 50$ et $n = 100$. Que constate-t-on ?

2) Recopier et compléter le tableau à double entrée.

	1	2	3	4	5	6
1	$+5$	-1				
2						
3						
4						
5						
6						

3) Calculer la probabilité p de perdre 1 euro, puis la probabilité q de gagner 5 euros à ce jeu.

4) Calculer le réel $E = p \times (-1) + q \times 5$.
Ce nombre est appelé **espérance** mathématique du gain.

5) Que pensez-vous du gain moyen que peut espérer le joueur sur un grand nombre de parties ? Ce jeu favorise-t-il le joueur ou l'organisateur ?

ACTIVITÉ 3 Jeu concours

Pendant une émission musicale de télévision, le jeu concours suivant apparaît à l'écran.

> **Jeu SMS**
>
> Quel musicien faisait partie du groupe des « Beatles » ?
>
> **1.** Bono **2.** John Lennon
>
> Envoyez 1 ou 2 par SMS au 71028 et découvrez immédiatement si vous avez gagné :
> - 3 voyages d'une semaine à Liverpool (valeur unitaire 2 000 €)
> - 10 albums « Sergent Pepper » (valeur unitaire 20 €)
> - 100 tee-shirts (valeur unitaire 10 €)
>
> Coût du SMS : 0,25 €. Tirage au sort parmi les bonnes réponses.

On considère qu'il y a eu 100 000 participants qui ont tous donné la bonne réponse.
On note X la variable aléatoire qui donne la valeur du gain algébrique (différence entre la valeur du cadeau et le coût du SMS) obtenu par un participant.

1) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

2) Quel coût aurait-on dû fixer par SMS pour que l'espérance soit nulle ? (On parle alors de jeu équitable.)

Cours - Méthodes

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

DÉFINITION : Variable aléatoire discrète

Soit $\Omega = \{e_1; e_2; ...; e_m\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire.
Une **variable aléatoire** X sur Ω est une fonction qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel.

NOTATION : x est un réel, l'événement « X prend la valeur x » est noté $(X = x)$, il est formé de toutes les issues de Ω ayant pour image x.

DÉFINITION : Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$. Lorsqu'à chaque valeur x_i, on associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit **la loi de probabilité** de X.

REMARQUE : La loi de probabilité d'une variable aléatoire se présente à l'aide d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

On a $P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_n) = 1$.

MÉTHODE 1 Étudier une variable aléatoire

► Ex. 23 p. 278

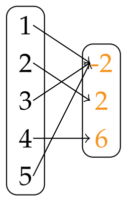
Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :
1) on détermine les valeurs x_i que peut prendre X ;
2) on calcule les probabilités $P(X = x_i)$;
3) on résume les résultats dans un tableau.

Exercice d'application

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5.
Un joueur participe à la loterie en payant 2 €, ce qui lui donne le droit de prélever au hasard un jeton dans l'urne.
- Si le numéro est pair, il gagne en euros le double de la valeur indiquée par le jeton.
- Si le numéro est impair, il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au « gain algébrique ».
Déterminer la loi de probabilité de X.

Correction



L'univers est l'ensemble des 5 jetons.
Les cinq issues sont équiprobables.
Les jetons 1, 3 et 5 font perdre 2 euros ;
le jeton 2 fait gagner $2 \times 2 - 2 = 2$ euros ;
le jeton 4 fait gagner $4 \times 2 - 2 = 6$ euros.
X peut prendre les valeurs -2 ; 2 et 6.
L'événement $(X = -2)$ est réalisé pour les issues 1 ; 3 ; 5 donc $P(X = -2) = \frac{3}{5}$.
L'événement $(X = 2)$ est réalisé pour l'issue 2 donc $P(X = 2) = \frac{1}{5}$.
L'événement $(X = 6)$ est réalisé pour l'issue 4 donc $P(X = 6) = \frac{1}{5}$.
On présente la **loi de probabilité** de X dans un tableau.

x_i	-2	2	6
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. Espérance, variance et écart-type

DÉFINITIONS

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1; x_2; ...; x_n$ avec les probabilités $p_1; p_2; ...; p_n$.

- On appelle **espérance** de X le nombre : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_ix_i$.
- On appelle **variance** de X le nombre :
$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} p_i(x_i - E(X))^2.$$
- On appelle **écart-type** de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

REMARQUES :

- Le mot « espérance » vient du langage des jeux : lorsque X désigne le gain, $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties.
- Une autre formule de la variance est $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i{x_i}^2 - [E(X)]^2$ (voir exercice 70, p. 286).

VOCABULAIRE : Un jeu est **équitable** lorsque l'espérance du gain est nulle.

MÉTHODE 2 Utiliser la calculatrice

► Ex. 31 p. 279

On souhaite calculer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire.

- **Avec une TI**
  Appuyer sur STAT, puis menu EDIT, sélectionner 1 : Edite
  Entrer les valeurs x_i en liste L1 et les probabilités p_i en liste L2
  Pour afficher les paramètres, appuyer sur STAT, puis menu CALC, sélectionner 1 :Stats 1-Var, taper L1,L2, puis appuyer sur Entrer.
- **Avec une Casio**
  Sélectionner le menu 2 (STAT)
  Entrer les valeurs x_i dans List1 et les probabilités p_i dans List2.
  Sélectionner (F2) CALC puis (F6) SET, sélectionner 1 : Var Xlist (F1) List 1 et 1VarFreq (F2) List2. Appuyer sur EXIT (F1) 1Var.

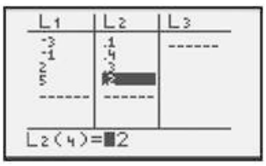
Exercice d'application

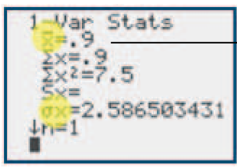
On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.
Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ avec une calculatrice.

x_i	-3	-1	2	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Correction

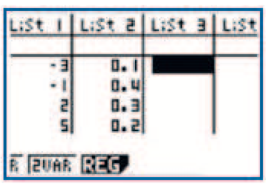
Avec une TI

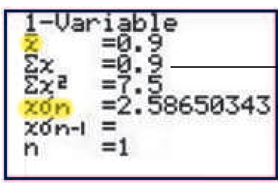




espérance
écart-type

Avec une Casio





espérance
écart-type

MÉTHODE 3 **Interpréter l'espérance et la variance**

► Ex. 45 p. 281

Exercice d'application

On donne les lois de probabilités du gain X et Y de deux jeux.

Jeu n° 1

x_i	-5	-1	0	1	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Jeu n° 2

y_i	-3	-1	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Quel jeu peut-on conseiller au joueur ?

Correction

Pour le jeu n° 1 : $E(X) = -0,3$, $V(X) = 8,01$ et $\sigma(X) \approx 2,83$.
Pour le jeu n° 2 : $E(Y) = -0,3$, $V(Y) = 1,81$ et $\sigma(Y) \approx 1,35$.
Les deux jeux ont la même espérance de gain, celle-ci étant négative. Les jeux sont **défavorables** aux joueurs, on peut donc les déconseiller.
L'écart-type mesure la dispersion des gains autour de l'espérance, donc il évalue le **risque du jeu**. Ici, $\sigma(Y) < \sigma(X)$.
Si un joueur veut vraiment participer, il vaut mieux lui conseiller le jeu n° 2 pour lequel le degré de risque est moins grand.

3. Transformation affine d'une variable aléatoire

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1 ; x_2 ; ... ; x_n.
Pour tous réels a et b, on peut définir une autre variable aléatoire, en associant à chaque issue donnant la valeur x_i, le nombre $ax_i + b$. On note cette variable aléatoire $aX + b$.

PROPRIÉTÉ

$$E(aX+b) = aE(X) + b \quad \text{et} \quad V(aX) = a^2 V(X).$$

PREUVE

$$\begin{aligned}
E(aX+b) &= p_1(ax_1+b) + p_2(ax_2+b) + ... + p_n(ax_n+b)\\
&= ap_1x_1 + bp_1 + ap_2x_2 + bp_2 + ... + ap_nx_n + bp_n\\
&= ap_1x_1 + ap_2x_2 + ... + ap_nx_n + bp_1 + bp_2 + ... + bp_n\\
&= a(p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n) + b(p_1 + p_2 + ... + p_n)\\
&= aE(X) + b \times 1\\
E(aX+b) &= aE(X) + b
\end{aligned}$$

D'après la seconde formule de la variance :
$$V(aX) = p_1(ax_1)^2 + p_2(ax_2)^2 + ... + p_n(ax_n)^2 - [E(aX)]^2$$

D'après la formule précédente : $E(aX) = aE(X)$, donc :
$$\begin{aligned}
V(aX) &= p_1a^2{x^2}_1 + p_2a^2{x^2}_2 + ... + p_na^2{x^2}_n - [aE(X)]^2\\
&= a^2\left(p_1{x^2}_1 + p_2{x^2}_2 + ... + p_n{x^2}_n\right) - a^2[E(X)]^2\\
&= a^2\left(p_1{x^2}_1 + p_2{x^2}_2 + ... + p_n{x^2}_n - [E(X)]^2\right)\\
V(aX) &= a^2V(X)
\end{aligned}$$

Remarque : $V(aX+b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$

En effet :

- $$V(aX+b) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(ax_i + b - E(aX+b))^2$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} p_i(ax_i + b - aE(X) - b)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} p_i(ax_i - aE(X))^2$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} p_i a^2(x_i - E(X))^2$$
$$V(aX+b) = a^2V(X)$$
- $$\sigma(aX+b) = \sqrt{V(aX+b)}$$
$$= \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)}$$
$$\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$$

Exemple

On donne $E(X) = 3$ et $V(X) = 16$.

Calculer :

1) $E(-2X+5)$
2) $V(-2X+5)$
3) $\sigma(-2X+5)$

Correction

1) $E(-2X+5) = -2E(X) + 5 = -2 \times 3 + 5 = -1$
2) $V(-2X+5) = (-2)^2 \times V(X) = 4 \times 16 = 64$
3) $\sigma(-2X+5) = |-2|\sigma(X) = 2\sqrt{V(X)} = 2 \times \sqrt{16} = 8$

MÉTHODE 4 Appliquer une transformation affine

► Ex. 51 p. 282

Exercice d'application

Un coiffeur se déplace à domicile.

On note X le nombre de rendez-vous sur une journée.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,03	0,09	0,15	0,38	0,18	0,17

Chaque rendez-vous lui rapporte 30 euros, et ses frais de fonctionnement quotidiens s'élèvent à 15 euros.

On note Y son gain journalier.

1) Calculer $E(X)$.
2) Quelle relation lie X et Y ?
3) En déduire $E(Y)$.

Correction

1) $E(X) = 0,03 \times 0 + 0,09 \times 1 + 0,15 \times 2 + 0,38 \times 3 + 0,18 \times 4 + 0,17 \times 5$

$E(X) = 3,1.$

2) Le gain journalier Y est tel que $Y = 30X - 15$.
3) $$E(Y) = E(30X - 15)$$
$$= 30E(X) - 15$$
$$= 30 \times 3,1 - 15$$
$$= 93 - 15$$
$E(Y) = 78$ (en euros).

Ainsi, le coiffeur peut espérer gagner 78 euros en moyenne par jour.

S'entraîner

Activités mentales

1 X est une variable aléatoire. Déterminer les événements contraires de :

1) $(X > 5)$;
2) X est supérieur ou égal à 2 ;
3) $(X \leq 3)$;
4) X est inférieur ou égal à 4.

2 Donner l'affirmation contraire de :

1) « Tous les élèves de la classe seront admis au bac » ;
2) « Paul mange tous les jours à la cantine » ;
3) « Je ne vais jamais au cinéma le dimanche » ;
4) « Chaque élève de la classe possède un téléphone portable ».

3 Calculer a pour que le tableau définisse bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,15	0,2	a	0,05	0,35

4 Une variable aléatoire X prend les valeurs 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5. On donne :
$P(X \leq 2) = 0,5$ et $P(X \geq 4) = 0,3$.
Calculer $P(X = 3)$ et $P(X \leq 3)$.

5 Dans un magasin de meubles, on note X le nombre de tables vendues par jour. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Calculer :

1) $P(X \leq 2)$
2) $P(X > 3)$
3) $P(X \leq 1 \text{ ou } X = 5)$
4) $P(X \geq 2 \text{ et } X \leq 4)$

6 Une variable aléatoire prend chacune des valeurs 0 ; 1 ; 2 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$.
Calculer $E(X)$.

7 Le nombre de clients passant à la caisse d'un supermarché en 10 min est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité ci-dessous.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Combien de clients, en moyenne, le caissier peut-il espérer faire passer en une heure ?

8 On donne la ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui représente le gain (positif ou négatif) associé à un jeu.

x_i	-4	-3	0	2	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Le jeu est il équitable ? Est-il favorable au joueur ou défavorable au joueur ?

9 X est une variable aléatoire d'espérance 2 et de variance 5. Calculer :

1) $E(5X)$
2) $E(3X - 6)$
3) $V(-X)$
4) $V(2X)$

Événements

10 A et B sont deux événements tels que :

$$P(A) = \frac{1}{2} ; P(B) = \frac{1}{3} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $P(A \cup B)$.

11 A et B sont deux événements tels que :
$P(A) = 0,3$; $P(\overline{B}) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,8$.
Calculer $P(A \cap B)$.

12 A et B sont deux événements tels que :
$P(\overline{A \cap B}) = 0,88$; $P(A) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,7$.
Calculer $P(B)$.

13 A et B sont deux événements tels que :
$P(A \cap \overline{B}) = 0,41$;
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,12$;
$P(\overline{A} \cap B) = 0,2$.

1) Faire un diagramme.
2) Calculer $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A)$ et $P(B)$.

14 Un dé cubique numéroté de 1 à 6 est truqué de telle sorte que la probabilité de chaque face est inversement proportionnelle au numéro qu'elle porte.
Déterminer la loi de probabilité pour un lancer de ce dé.

15 A et B sont deux événements incompatibles tels que $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,6$.
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils incompatibles ?

16 Une urne contient deux boules bleues portant les numéros 1 et 2, et trois boules rouges portant les numéros 1 à 3. Les boules sont indiscernables au toucher.
On tire successivement deux boules sans remise.

1) Déterminer toutes les issues possibles à l'aide d'un tableau à double entrée.
2) Déterminer la probabilité des événements suivants :
   A : « Le tirage comporte des boules de même couleur » ;
   B : « Le tirage comporte au moins une boule rouge » ;
   C : « Le tirage comporte au moins une boule numérotée 2 ».
3) Calculer :
   $P\left(\overline{A}\right), P\left(\overline{C}\right), P\left(A \cap B\right)$ et $P\left(\overline{A} \cup C\right)$.

17 Suite à une étude statistique, on a observé que sur une population :

- 40 % des individus possèdent une tablette ;
- 80 % des individus ont un ordinateur ;
- 30 % des individus possèdent à la fois une tablette et un ordinateur.

Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard :

1) ait une tablette mais pas d'ordinateur ?
2) ait un ordinateur mais pas de tablette ?
3) ne possède ni tablette, ni ordinateur ?

18 Un sac contient cinq jetons portant les inscriptions :

-4 -2 1 3 5

On tire un premier jeton sans remise, on note sa valeur m, puis on tire un second jeton et on note sa valeur p.

1) Combien l'univers des couples de jetons $(m\,;\,p)$ obtenus comprend-il d'issues ?
2) On considère les événements :
   A : « $m + p$ est négatif » ;
   B : « mp est positif ».
   Calculer :
   $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

19 Pour ne pas se faire voler son vélo, Lucas utilise un antivol dont le code comprend trois chiffres.

1) Combien de codes peut-il choisir ?
2) Lucas a oublié son code et il compose un nombre au hasard.
   Quelle est la probabilité des événements suivants ?
   A : « Le cadenas s'ouvre » ;
   B : « Lucas tape un multiple de 5 » ;
   C : « Un seul chiffre est incorrect ».

20 **Math et SVT**

Le tableau suivant donne le groupe sanguin et le rhésus de 200 individus d'une population.

	Rhésus +	Rhésus –
Groupe O	74	12
Groupe A	78	12
Groupe B	14	4
Groupe AB	4	2

Une personne du groupe O avec rhésus négatif est un donneur universel (il peut donner son sang à tous les autres).

On choisit au hasard une personne dans ce groupe.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- « La personne de ce groupe est un donneur universel » ;
- « La personne appartient au groupe AB » ;
- « La personne appartient au groupe O ou au groupe A ».

21 L'association artistique d'une commune propose deux activités : peinture à l'huile et aquarelle. 60 % des adhérents sont inscrits au cours de peinture à l'huile, 35 % au cours d'aquarelle et 7 % aux deux. On interroge un adhérent au hasard. On note H l'événement : « L'adhérent interrogé pratique la peinture à l'huile » et A l'événement : « L'adhérent interrogé pratique l'aquarelle ».

1) Recopier et compléter le tableau des fréquences en pourcentages.

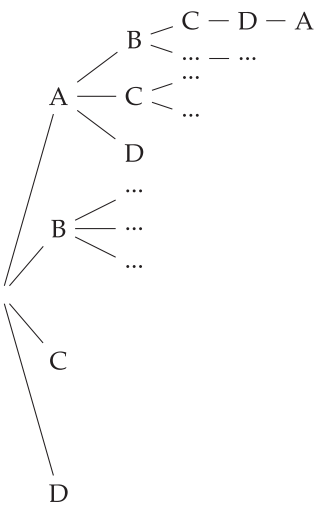
	A	$\overline{A}$	total
H			60
$\overline{H}$			
total			100

2) Définir par une phrase les événements suivants et calculer leurs probabilités.
   a) $H \cap \overline{A}$; b) $\overline{H} \cap A$; c) $\overline{H} \cap \overline{A}$.

S'entraîner

22 Chaque jour, un transporteur doit se rendre dans quatre magasins A, B, C et D. À la fin de ses livraisons, il doit revenir au premier magasin. Un trajet possible est, par exemple, DABCD.

1) Reproduire et compléter l'arbre suivant pour déterminer tous les trajets possibles.



2) Le transporteur choisi son trajet au hasard.
Calculer la probabilité des événements suivants :

- R : « Le magasin C est livré en second » ;
- S : « Le magasin B est livré juste après A » ;
- T : « Le magasin B est livré plus tard que D dans la journée ».

Variable aléatoire, loi de probabilité

23 ► MÉTHODE 1 p. 272
On lance deux dés équilibrés à 6 faces et on note S la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de S.

24 Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de passages à l'infirmerie dans un lycée dans une journée.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,35	0,3	0,25	b

1) Calculer le réel b.

2) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux passages à l'infirmerie dans la journée.

25 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,02	0,12	a	0,31	0,27

1) Calculer le réel a.

2) Calculer $P(X \geq 2)$ et $P(X > 0)$.

26 Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	0	1	2
p_i	p	$2p$	$3p$

Calculer p.

27 Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	0	5	10
p_i	0,76	a	a^2

Calculer a.

28 Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains devant peser normalement 500 g. On note X la variable aléatoire donnant les masses possibles des pains en grammes.
On donne la loi de probabilité de X :

x_i	480	490	500	510	520
p_i	0,08	0,29	0,41	0,12	0,1

1) Quelle est la probabilité qu'un pain pèse au moins 500 g ?

2) Seuls les pains pesant au moins 490 g vont être commercialisés. Quelle est la probabilité qu'un pain soit commercialisé ?

29 On lance trois fois de suite une pièce équilibrée.

1) À l'aide d'un arbre, déterminer toutes les issues possibles associées à cette expérience.

2) On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de coté « pile » obtenu.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer $P(X \geq 1)$.

30 Julie lance trois pièces équilibrées de 5, 10 et 20 centimes. Chaque coté « face » obtenu lui fait gagner la valeur de la pièce.

1) À l'aide d'un arbre, déterminer toutes les issues de cette expérience aléatoire.
2) On note X la variable aléatoire donnant la somme totale gagnée en centimes.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer $P(X < 50)$.

Espérance, écart-type

31 ► MÉTHODE 2 p. 273 CALC

Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,25	0,4	0,2	0,05

1) Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.
2) Calculer $P(X \geq 0)$ puis $P(X < 1)$.
3) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ avec une calculatrice.

32 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	2	2,5	3	3,5
$P(X = x_i)$	0,3	p	0,2	0,3

1) Calculer p.
2) Calculer $E(X)$.

33 On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

Calculer a sachant que $E(X) = 1,2$.

x_i	-7	3	a
p_i	0,3	0,5	0,2

34 Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. La variable aléatoire X prend :

- la valeur 0 si on tire sept, huit ou neuf ;
- la valeur 5 si on tire dix ;
- la valeur 10 si on tire valet, dame, roi ;
- la valeur 20 si on tire un as.

1) Donner la loi de probabilité de X.
2) Calculer son espérance et son écart-type.

35 On considère cinq cartons sur lesquels sont écrits les mots :

Le	sort	en	est	jeté

Ces cartons sont placés dans un sac. On tire au hasard un carton et on note X le nombre de fois où la lettre « e » est apparue.

Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

36 Lise possède quelques économies dans une tirelire qui contient :

- 7 pièces de 2 euros ;
- 12 pièces de 1 euros ;
- 9 pièces de 50 centimes d'euros ;
- 4 pièces de 20 centimes d'euros ;
- 5 pièces de 10 centimes d'euros.

Lise tire au hasard une pièce dans sa tirelire.

On note X la variable aléatoire qui donne la valeur de la pièce tirée.

Calculer $E(X)$ et interpréter.

37 Blanche et Clara ont décidé d'offrir chacune un cadeau à une amie commune pour son anniversaire. Elles choisissent chacune indifféremment un livre, un disque ou un bijou.

1) a) Écrire les 9 issues possibles en s'aidant d'un arbre.
   b) On considère les trois événements suivants :
   A : « Les deux ont offert un bijou » ;
   B : « Personne n'a offert de livre » ;
   C : « Au plus une des deux amies a offert de disque ».
   c) Calculer les probabilités de chacun des événements A, B et C.
2) On admet qu'un livre coûte 20 €, un CD coûte 10 € et un bijou coûte 15 €. On note S la variable aléatoire qui donne la somme totale en euros dépensée par les trois amies.
   a) Déterminer les valeurs prises par S.
   b) Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire S.
   c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire S.

S'entraîner

38 On distribue au hasard 150 bons d'achat à la sortie d'une parfumerie.
Parmi les bons d'achat offerts :

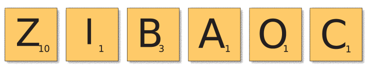
- 5 donnent droit à 20 euros de réduction ;
- 10 donnent droit à 10 euros de réduction ;
- 40 donnent droit à 5 euros de réduction ;
- les autres donnent droit à 2 euros de réduction.

Soit X la variable aléatoire qui donne le montant de la réduction offerte pour un bon d'achat distribué.

1) Donner la loi de probabilité de X.
2) Calculer $E(X)$.

39 Une urne contient 5 boules marquées 1 point et n boules marquées 3 points.
On tire au hasard une boule dans l'urne et note X la variable aléatoire qui donne le score obtenu.
On sait que $E(X) = \frac{13}{6}$.
Calculer n.

40 On considère les six pièces de Scrabble suivantes :



Une partie consiste à placer les six lettres faces cachées sur une table ; on demande au joueur de choisir une lettre parmi les six. Le jeu nécessite une mise de 3 euros et le joueur reçoit en euros le nombre de points marqués sur la pièce.

1) On considère la variable aléatoire X qui prend pour valeur le gain algébrique du jeu précédent, c'est-à-dire la somme reçue moins la mise de 2 euros.
  a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
  b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
  c) Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat obtenu.

2) Un joueur prétend qu'il peut modéliser ce jeu à l'aide d'un dé cubique équilibré.
Proposer un modèle correspondant à son affirmation.

41 Une entreprise fabrique des pièces. Pour effectuer un contrôle d'un type de pièces, on mesure avec précision leur diamètre. On rassemble les résultats dans le tableau suivant :

Diamètre en cm	9,8	9,9	10	10,1	10,2
Probabilité	0,05	0,06	0,71	0,14	0,04

Une pièce est dite conforme lorsqu'elle a un diamètre de 10 cm.

1) On tire au hasard une pièce dans le lot. Quelle est la probabilité que cette pièce soit conforme ?
2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce mesurée, associe l'écart par rapport à la dimension théorique de 10 cm.
  a) Donner la loi de probabilité de X.
  b) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

42 Une machine comprend un écran composé de 9 cases numérotées.

0	1	3
0	2	0
1	0	1

Lorsqu'on met la machine en marche, l'une des cases s'allume de façon aléatoire, toutes les cases ayant la même probabilité de s'allumer. Pour jouer une partie, un joueur mise 1 € et actionne la machine, il reçoit alors un montant en euro égal au numéro de la case qui s'est allumée. Un joueur joue une partie.
On note X son gain algébrique.

1) Calculer $P(X > 0)$.
2) Calculer $E(X)$.
3) Le coût de la machine est de 25 €. Trouver le nombre minimum de parties à organiser pour que l'organisateur ne perde pas d'argent.
4) Une fois la machine rentabilisée, on veut modifier le numéro placé dans la case en haut à droite pour que le gain algébrique moyen du joueur qui joue une partie soit égal à 0. Quel numéro faut-il marquer dans cette case ?

43 On propose deux jeux dont les règles sont décrites ci-dessous.

Jeu nº 1 :
On lance un dé cubique équilibré numéroté de 1 à 6. Si on obtient 5 ou 6, on gagne 2 euros, sinon on perd 1 euro. Ensuite on lance une pièce équilibrée, si on obtient pile on gagne 1 euro, sinon on ne gagne rien.

Jeu nº 2 :
On lance un dé tétraédrique équilibré numéroté de 1 à 4. Si on obtient 4, on gagne 3 euros, sinon on perd 1 euro. Ensuite, on lance une pièce équilibrée, si on obtient pile on gagne 2 euros, sinon on perd 1 euro.

1) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y donnant le gain de chacun de ces jeux.
2) Quel est le meilleur jeu à choisir pour un joueur ?

44 Dans un jeu de domino, chaque domino est partagé en deux parties, chacune portant un numéro de 0 à 6 représenté par des points. Un double est un domino dont les deux parties portent le même numéro. Il n’y a aucun domino identique.

1) Prouver que le nombre de dominos est 28 (on pourra utiliser un tableau à double entrée et barrer certaines cases).

2) Un joueur tire au hasard un domino du jeu.

a) Quelle est la probabilité d’obtenir un double ?

b) Quelle est la probabilité d’obtenir un domino dont la somme des deux numéros soit divisible par 3 ?

3) X est la variable aléatoire prenant la valeur -1 lorsque le joueur obtient un domino non double, et la valeur n lorsqu’il obtient le double « n et n ».

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer l’espérance $E(X)$.

45 ► MÉTHODE 3 p. 274

Voici les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y donnant les scores de deux tireurs à l’arc.

Joueur 1

x_i	10	20	30	50
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,25	0,25

Joueur 2

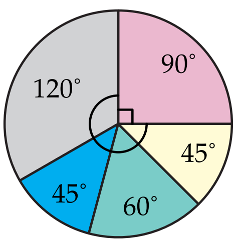
y_i	10	20	30	50
$P(Y = y_i)$	0,05	0,4	0,45	0,1

1) Quel joueur est le meilleur ?

2) Quel joueur est le plus régulier ?

46 Loterie

Une roue de loterie est partagée en cinq secteurs.



1) L’ensemble Ω des couleurs est muni d’une loi P telle que la probabilité d’une couleur est proportionnelle à la mesure de l’angle au centre du secteur.

Donner la loi de probabilité de P.

2) À chaque issue, on associe un gain algébrique selon la règle suivante :

bleu : +5 € ; jaune : +5 € ; vert : 0 € ;

rose : -2 € ; gris : -3 €.

Quel gain moyen peut espérer le joueur ?

3) Quel gain g aurait-il fallu attribuer à la couleur verte afin que le jeu soit équitable ?

47 Roulette

La roulette comporte 37 cases numérotées de 0 à 36. Les entiers pairs sont sur des cases noires, les entiers impairs sont sur des cases rouges mais 0 est sur une case verte.

Un joueur veut participer, il a deux stratégies possibles.

Stratégie 1 :

Le joueur mise 5 euros sur un numéro entre 1 et 36. S’il gagne il remporte 35 fois sa mise et récupère sa mise, sinon il perd sa mise.

Stratégie 2 :

Le joueur mise 5 euros sur une couleur (noir ou rouge). S’il gagne il remporte 1 fois sa mise et récupère sa mise, sinon il perd sa mise.

Calculer l’espérance et l’écart-type du gain du joueur dans les deux cas. Commenter.

48 Une entreprise fabrique des clous en grande quantité.

On prélève un clou au hasard et on note L la variable aléatoire qui donne la longueur du clou en cm.

Le tableau suivant donne la loi de probabilité de L.

l_i	5,8	5,9	6	6,1	6,2
$P(L = l_i)$	0,05	0,21	0,47	0,24	0,03

1) On prélève 100 clous. Quelle longueur moyenne peut-on espérer ?

2) L’entreprise décide de ne pas commercialiser les clous tels que $|L - 6| > 0,1$. Pour un clou pris au hasard dans la production, quelle est la probabilité que ce clou ne soit pas commercialisé ?

3) Parmi les clous commercialisés, quelle proportion en pourcentage mesure exactement 6 cm ? En déduire la probabilité qu’un clou commercialisé ne mesure pas 6 cm.

S'entraîner

49 Naissances des garçons

ALGO

On s'intéresse au nombre de garçons dans une famille de trois enfants. Pour éviter le coût d'une enquête sur la population, on choisit de simuler une expérience aléatoire qui modélise cette situation.

Partie A : Simulation

1) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule les fréquences du nombre de garçons sur N « familles ».
2) Programmer cet algorithme sur une calculatrice (ou un logiciel). Puis exécuter le programme pour une simulation sur 100 familles.
   a) Quelles sont les fréquences observées sur le nombre de garçons ?
   b) Calculer la moyenne du nombre de garçons par famille.

```
Variables :
   M, N, A, B, C, D, i, j, k : entiers
Demander N
Traitement
A prend la valeur 0
B prend la valeur 0
C prend la valeur 0
D prend la valeur 0
Pour i variant de 1 à ...
  M = 0
  Pour j allant de 1 à 3
    K prend la valeur Entieraléatoire(0;1)
    M prend la valeur ....
  FinPour
  Si M = 0 alors A = A+1
  Fin SI
  Si M = 1 alors B = B+1
  Fin Si
  Si M = 2 alors C = C+1
  Fin Si
  Si M = 3 alors D = D+1
  Fin Si
FinPour
Affichage
  Afficher A/N, B/N, C/N, D/N
```

Partie B : Étude théorique

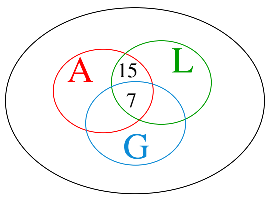
1) À l'aide d'un arbre, dénombrer toutes les issues possibles pour les familles de trois enfants.
2) On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de garçons dans une famille de trois enfants choisie au hasard.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer son espérance.
   c) Comparer avec les résultats de la **partie A**.

50 Allergies

Une étude médicale s'intéresse aux cas d'allergies sur une population de 500 individus. Parmi les individus, 58 présentent l'allergie aux acariens (A), 47 présentent l'allergie au gluten (G), 52 présentent une allergie au lactose (L). De plus, 19 individus présentent les allergies A et G, 22 les allergies A et L, 17 les allergies G et L. Enfin, 7 individus présentent les trois allergies.

On choisit un individu au hasard dans cette population. On note S la variable aléatoire donnant le nombre d'allergies présentées parmi A, G et L.

1) Reproduire et compléter le diagramme suivant.



2) Déterminer la loi de probabilité de S.
3) Calculer $E(S)$ et interpréter.
4) Le traitement antihistaminique revient à 20 euros par allergie traitée et par individu. Calculer le coût moyen par individu sur cette population.

Variable $aX + b$

51

► MÉTHODE 4 p. 275

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 2$ et $V(X) = 5$.

1) Calculer $E(3X-1)$ et $V(3X-1)$.
2) Calculer $E(-2X+1)$ et $V(-2X+1)$.

52 Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = -1$ et $\sigma(X) = 3$.

1) Calculer $E(-X)$ et $\sigma(-X)$.

2) Calculer $E(-4X)$ et $\sigma(-4X)$.

53 Paul effectue en voiture le même trajet tous les jours. Sur sa route, il y a trois feux.

Une étude statistique, portant sur le nombre X de feux rouges a permis d'établir les résultats suivants :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2) Le trajet sans aucun arrêt dure 15 min et chaque feu rouge rallonge la durée du trajet de 2 min.

Soit T la variable aléatoire qui donne la durée du trajet de Paul.

a) Quelle relation lie X et T ?

b) En déduire $E(T)$ et $V(T)$.

54 Un commerçant vend entre 0 et 5 fauteuils d'un modèle donné par jour. Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de fauteuils vendus quotidiennement. X suit la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,18	0,23	0,4	a	0,05

1) Calculer a.

2) Calculer $E(X)$.

3) Le vendeur perçoit une commission de 100 € par fauteuil. De plus, il a des frais qui s'élèvent à 25 € par jour. Déterminer le salaire qu'il peut espérer sur un mois où il travaille 20 jours.

55 Un parc d'attractions propose une carte d'entrée pour la journée au prix de 30 €.

Cette carte donne accès à des attractions avec un prix unique de 2 € par attraction. Une étude statistique a permis d'obtenir le tableau suivant :

Nombres d'attractions	2	3	4	5	6
Pourcentage de clients	10	25	35	25	5

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'attractions choisies par un visiteur pris au hasard.

On note S la variable aléatoire qui donne la somme totale qu'il dépense.

1) Quelle relation lie X et S ?

2) Calculer $E(X)$ et en déduire $E(S)$.

3) Le parc a des frais d'organisation qui s'élèvent en moyenne à 25 € par client. Avec 200 visiteurs par jour, quel bénéfice peut espérer le gérant sur un an, en ouvrant le parc 365 jours ?

56 Un exercice est composé de cinq questions pour lesquelles, on doit répondre obligatoirement par « vrai » ou « faux ». Une réponse juste rapporte 2 points, une réponse fausse retire 1 point. En cas de score final négatif, la note est ramenée à zéro.

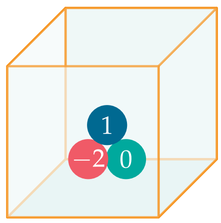
On note X la variable aléatoire qui donne la note d'un candidat ayant répondu au hasard.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Quelle note peut espérer le candidat ?

3) On décide de ramener la note de chaque candidat sur 20. Quelle note peut espérer cette fois le candidat ?

57 Une urne contient une boule rouge, une boule verte et une boule bleue respectivement marquée -2 points, 0 point et 1 point. On tire au hasard et sans remise deux boules dans l'urne.



1) À l'aide d'un arbre, déterminer toutes les issues possibles associées à cette expérience aléatoire.

2) On note X la variable aléatoire qui donne le gain obtenu.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Si on joue un grand nombre de fois à ce jeu, combien peut-on espérer gagner ou perdre en moyenne par partie ?

3) On décide de multiplier par 10 la valeur indiquée par chaque boule. Que devient l'espérance du gain ?

Approfondir

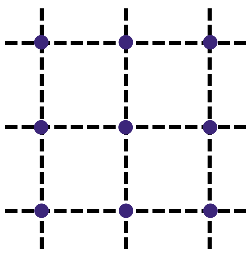
58 Une salle de spectacle comprend 500 places. Les places numérotées de 1 à 300 sont en orchestre, celles numérotées de 301 à 400 sont au premier balcon et celles numérotées de 401 à 500 sont au second balcon. Tous les billets ont été vendus.

1) On choisit une personne au hasard dans les spectateurs. Quelle est la probabilité que cette personne soit située au second balcon ?

2) On choisit deux personnes distinctes au hasard.

- **a)** Quelle est la probabilité que leurs numéros de place soient deux nombre pairs ?
- **b)** Quelle est la probabilité que leurs numéros de place soient deux entiers consécutifs ?

59 On considère la grille suivante :



On choisit au hasard trois points distincts.

Quelle est la probabilité que ces trois points soient alignés ?

60 **Tiercé**

Un joueur joue au tiercé et choisit ses trois numéros au hasard. 8 chevaux participent à la course.

1) **a)** Il y a 8 choix pour le cheval qui arrive en premier. Combien y en a-t-il pour le deuxième ? pour le troisième ?

- **b)** En déduire le nombre d'arrivées possibles pour les trois premiers chevaux.

2) Un joueur paie 10 euros pour un ticket du tiercé. Si son tiercé est le bon, il gagne 1 000 euros ; si son tiercé est dans le désordre, il gagne 100 euros. Dans les autres cas, il ne gagne rien.

Quelle est la loi de probabilité de son gain algébrique ?

3) Quelle est l'espérance de son gain ?

61 On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'ensemble Ω des couples $(x; y)$, avec $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$ est muni de la loi équirépartie. À chaque couple $(x; y)$ on associe $|x - y|$. On définit ainsi une variable aléatoire X sur Ω.

1) Définir la loi de probabilité de X.

2) Calculer l'espérance et la variance de X.

62 ALGO

Un sac contient 100 jetons. Sur chacun d'entre eux est inscrit l'un des numéros 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4.

Le tableau ci-dessous donne la répartition de ces jetons.

Numéro inscrit	0	1	2	3	4
Nombre de jetons	30	25	20	15	10

Un joueur tire au hasard un jeton dans ce sac. On note p_n la probabilité que ce joueur tire un jeton portant le numéro n.

1) Calculer p_n pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq 4$.

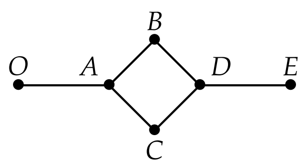
2) La règle du jeu suit l'algorithme suivant :

```
Variables : n est un entier entre 0 et 4.
            G est un entier
Traitement
   Saisir n
   Si n est pair
      alors G prend la valeur 2n
      sinon G prend la valeur -n
   FinSi
Affichage
   Afficher «le gain est», G
```

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque numéro de jeton, associe le gain algébrique du joueur.

- **a)** Quelles sont les valeurs prises par G ?
- **b)** Déterminer la loi de probabilité de G et calculer son espérance.

63 Une fourmi se déplace sur les segments de la figure ci-dessous.



Elle part du point O et met une minute pour parcourir un segment. Chaque fois qu'elle arrive en un point, elle choisit au hasard son chemin et peut donc revenir sur ses pas.

1) Construire un arbre qui décrit tous les trajets de 4 minutes possibles.

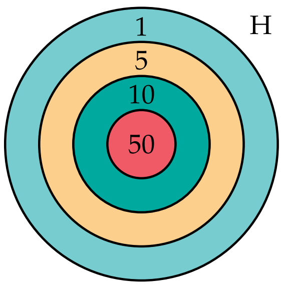
2) On note X la variable aléatoire qui à chaque trajet donne le nombre de points différents visités parmi O, A, B, C, D et E.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer l'espérance de X et en donner une interprétation.

64 Cible

Un jeu consiste à viser dans une cible dont les cercles concentriques ont pour rayons 1 ; 4 ; 8 et 12 cm. La probabilité d'atteindre une zone de la cible est proportionnelle à sa surface.



On suppose que le participant peut rater la cible, en tirant dans la zone H, avec une probabilité de 0,1.

1) Quelles sont les probabilités d'atteindre les différentes zones ?

2) On note X la variable aléatoire donnant le score du tireur.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

65 CALC

1) Un jeu consiste à lancer 3 fois une pièce parfaitement équilibrée. Le joueur gagne 100 euros s'il obtient trois fois pile. Sinon il perd 1 euro. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a) Représenter à l'aide d'un arbre les issues de cette expérience aléatoire.

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Le jeu est-il favorable au joueur ?

2) Dans cette question, la pièce est lancée n fois, n étant un nombre entier naturel non nul. Le joueur gagne 100 euros s'il obtient n fois pile ; sinon le joueur perd 1 euro. On note la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

a) Montrer que $P(X_n) = 100 = \dfrac{1}{2^n}$.

b) Calculer $E(X_n)$.

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que le jeu soit défavorable au joueur.

66 ALGO

On lance un dé équilibré jusqu'à ce que le six apparaisse et on s'arrête. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers effectués.

1) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?

2) Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.

3) On admet que pour tout entier $n \geq 1$:

$P(X = n) = \dfrac{5^{n-1}}{6^n}$.

a) Calculer la probabilité que le 6 n'apparaisse qu'au bout du 10e lancer.

b) On cherche à trouver le plus petit entier n à partir duquel $P(X = n) < 10^{-3}$.

Compléter l'algorithme suivant qui permet de répondre au problème.

```
Variables : N : entier
            P : réel
Traitement
   N prend la valeur 1
   P prend la valeur 1/6
   Tant que P ≥ 10^-3 faire
      N prend la valeur ...
      P prend la valeur ...
   FinTantQue
   Afficher...
```

c) Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou un logiciel. Qu'affiche-t-il en sortie ?

d) Modifier cet algorithme pour qu'il permette de trouver le plus petit entier n à partir duquel $P(X = n) < e$.

Approfondir

67 Un dé tétraédrique a été truqué de telle sorte que $p_2 = p_4 = 2p_1 = 2p_3$ (où p_i est la probabilité d'apparition du résultat i).

Un joueur lance ce dé. S'il obtient un résultat pair, il perd x euros, sinon il gagne y euros. Calculer x et y pour que le jeu soit équitable et que la variance du gain soit égale à 8.

68 Une urne contient 1 boule rouge et 4 boules noires. On prélève successivement et sans remise chacune des cinq boules. On note N le rang d'apparition de la boule rouge.

1) Quelles sont les valeurs prises par N ?

2) Déterminer la loi de probabilité de N.

3) Calculer $E(N)$ et interpréter.

69 Une entreprise fabrique des objets. 5 % des objets présentent au moins le défaut A, 3 % des objets présentent au moins le défaut B et 94 % n'ont aucun des défauts A et B.

1) Compléter la répartition des objets par les pourcentages qui conviennent.

	B	$\overline{B}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			100

2) On prélève un objet au hasard.

a) Calculer la probabilité que cet objet ne présente aucun défaut.

b) Calculer la probabilité que cet objet présente au moins un défaut.

3) La réparation du défaut A coûte 2 euros et celle du défaut B coûte 3 euros. On note X la variable aléatoire qui donne le coût de réparation par objet.

a) Quelles valeurs peut prendre X ?

b) Calculer $E(X)$.

c) Estimer le coût total des réparations pour 5 000 objets produits dans cette entreprise.

70 **Formule de König**

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$.

On rappelle que :

$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$ et $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2$.

1) Démontrer que $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i {x_i}^2 - (E(X))^2$.

2) On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

Calculer $V(X)$ avec la formule trouvée au **1)**.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

71 **Péréquation affine**

Lors d'une épreuve, les notes attribuées aux candidats suivent la loi de probabilité suivante :

Notes	0	1	2	3	4	5
Probabilité	0,01	0,04	0,06	0,11	0,19	0,16

Notes	6	7	8	9	10
Probabilité	0,10	0,13	0,14	0,04	0,02

1) Pour un candidat pris au hasard, on note X sa note obtenue. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2) Le responsable du concours souhaiterait que la moyenne soit égale à 5 et la variance soit égale à 3. Il demande d'appliquer une transformation affine qui à X associe $aX + b$.

Calculer a et b (on arrondit à 0,01 près).

72 **Optimisation (d'après Bac)**

Une urne contient 50 jetons de couleurs bleue, rouge ou jaune. 10 % des jetons sont bleus, il y a trois fois plus de jetons jaunes que de jetons bleus. Un joueur tire un jeton au hasard.

- S'il est rouge, il remporte le gain de base.
- S'il est jaune, il remporte le carré du gain de base.
- S'il est bleu, il perd le cube du gain de base.

On note X le gain à ce jeu.

1) On suppose que le gain de base est 2 euros.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de tirages.

2) On cherche à déterminer la valeur du gain de base g_0, telle que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal. Le résultat sera arrondi au centime d'euro. Soit x le gain de base en euros.

a) Montrer que le problème posé revient à étudier les éventuels extremums de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x$.

b) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c) Conclure.

73 Stationnement (d'après Bac)

Une personne a 5 jetons indiscernables au toucher dans sa poche : un jeton d'une valeur de 2 €, deux jetons d'une valeur de 1 € chacun et deux jetons d'une valeur de 0,50 € chacun.

Partie A

Cette personne choisit au hasard, successivement et sans remise, deux jetons dans sa poche. On s'intéresse à la somme S des valeurs des deux jetons choisis.

1) Construire un arbre ou un tableau décrivant cette expérience. En déduire les valeurs possibles de la somme S.
2) Soit A l'événement : « La somme S est égale à 1,5 », et B l'événement : « La somme S est égale à 1 ».
   a) Vérifier que la probabilité de l'événement A est égale à 0,4.
   b) Déterminer la probabilité de l'événement B.
3) Déterminer la probabilité pour que la somme S soit supérieure ou égale à 2.

Partie B

Cette personne introduit les deux jetons choisis dans un appareil de stationnement. Le coût est de 0,50 € pour une heure de stationnement.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de deux jetons associe la durée maximale de stationnement autorisé, exprimée en heures.

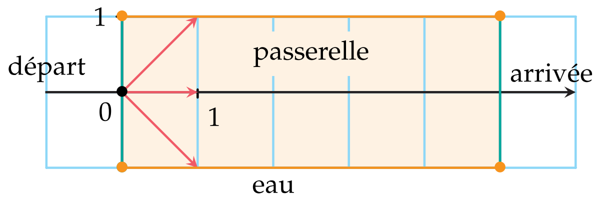
1) Déterminer, en utilisant la **partie A**, la probabilité pour que X prenne la valeur 3.
2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

74 D'après Bac ALGO

Pour un jeu télévisé, un candidat doit traverser une passerelle sans rambarde de 5 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière puisque le candidat est poussé de manière aléatoire par des gens du public :

- soit il avance d'un pas tout droit ;
- soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'événement « le candidat traverse la passerelle » c'est-à-dire « il n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur la passerelle pont au bout de 5 déplacements ».



1) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il simule la position du candidat au bout de 10 déplacements.

```
Variables
x, y, n : entiers
Traitement
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
  Tant que y ... et y ... et x ...
     Affecter à n un entier aléatoire
                     parmi -1 ; 0 et 1
     Affecter à y la valeur y + ...
     Affecter à x la valeur ...
  Fin tant que
Si x = ...  alors
  Afficher « le candidat a traversé »
Sinon
  Afficher « le candidat a perdu »
Fin si
Fin de l'algorithme
```

2) On donne les couples suivants : $(-1\ ;\ 1)$; $(10\ ;\ 0)$; $(2\ ;\ 4)$; $(10\ ;\ 2)$. Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.
3) a) Modifier l'algorithme pour qu'il simule N simulations de la marche du candidat qu'il affiche la fréquence de traversées réussies.
   b) Programmer l'algorithme sur une calculatrice ou un logiciel. Exécuter le programme pour plusieurs valeurs de N et estimer p.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Utiliser la calculatrice pour calculer l'espérance ou l'écart-type d'une variable aléatoire
- Calculer et interpréter l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On lance une pièce équilibrée 3 fois de suite.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de FACE obtenu.

75 L'univers comporte :

a) 4 issues b) 6 issues c) 8 issues d) 9 issues

76 Les valeurs prises par X sont :

a) $0\,;1\,;2\,;3$ b) $1\,;2\,;3$ c) $0\,;1\,;2$ d) $1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6$

77 $P(X=3) = \ldots$

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

78 $E(X) = \ldots$

a) $\frac{3}{2}$
b) 1
c) $\frac{1}{8}\times 0+\frac{3}{8}\times 1+\frac{3}{8}\times 2+\frac{1}{8}\times 3$
d) 0

79 $V(X) = \ldots$

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 1 d) 2

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la suivante :

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{6}$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

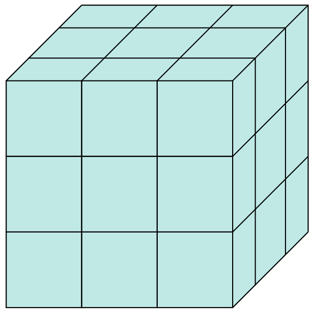
80 Le nombre a est :

a) aléatoire b) égal à $\frac{1}{2}$ c) égal à $\frac{1}{3}$ d) égal à $P(X=2)$

81 L'espérance de X est :

a) 2,5 b) 0 c) 2,25 d) $4a+\frac{1}{4}$

Un cube en bois est peint et découpé en petits cubes identiques. Tous les petits cubes sont placés dans un sac. On tire un cube au hasard et on note N le nombre de faces peintes.



82 N peut prendre les valeurs :

ⓐ $0\,;1\,;2\,;3$ ⓑ 27 valeurs ⓒ $0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6$

83 La loi de probabilité de N est :

ⓐ

k	0	1	2	3
$P(N=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

ⓑ

k	0	1	2	3
$P(N=k)$	0,04	0,22	0,44	0,30

ⓒ

k	0	1	2	3
$P(N=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

ⓓ

k	0	1	2	3
$P(N=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{6}{27}$

84 L'espérance de N est égale à :

ⓐ 1 ⓑ 1,5 ⓒ 2 ⓓ 3

On considère une variable aléatoire X.

85 Si $E(X) = -3$, alors $E(-X)$ est égal à :

ⓐ -3 ⓑ 3 ⓒ -9 ⓓ 9

86 Si $V(X) = 1$, alors $V(-2X)$ est égal à :

ⓐ -1 ⓑ -2 ⓒ 2 ⓓ 4

87 Si $\sigma(X) = 1$, alors $\sigma(-5X)$ est égal à :

ⓐ -4 ⓑ -5 ⓒ 5 ⓓ 25

88 Si $E(X) > 0$, alors :

ⓐ les valeurs prises par X sont toutes positives

ⓑ certaines valeurs prises par X sont positives

ⓒ au moins une valeur prise par X est positive

ⓓ aucune valeur prise par X n'est négative

89 Si $E(X) = m$, alors :

ⓐ $E(X-m) = 0$ ⓑ $E(-X) = -m$ ⓒ $E(X+m) = 0$ ⓓ $E(X+m) = 2m$

Travaux pratiques

TP 1 Joue pour gagner !

INFO

On actionne une machine à sous en insérant une pièce de 1 euro.
Chacun des trois rouleaux affiche un chiffre entre 0 et 9.

- Si on obtient 3 chiffres identiques, on gagne 30 euros.
- Si on obtient exactement 2 chiffres identiques, on gagne 2 euros.
- Autrement, on ne gagne rien.

1 Simulation avec un tableur

1) Ouvrir une feuille de calcul et compléter les cellules A1 à D1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	sim n°	Roul.1	Roul.2	Roul.3	3 chiffres	2 chiffres	gain1	gain2	gain alg.
2	1	3	0	3	FAUX	VRAI	0	2	1

En A2 : taper : **=1** .
En B2 : taper : **=ENT(ALEA()*10)** et recopier jusqu'en D2.
En E2 : taper : **=ET(B2=C2 ;C2=D2)**
En F2 : taper : **=ET(OU(C2=D2 ;D2=B2 ;B2=C2) ;NON(E2))**
En G2 : taper : **=SI(E2=VRAI ;30 ;0)**
Quelle formule doit-on rentrer en H2 ? puis en I2 ?

2) En A3 : taper : =A2+1. Sélectionner les cellules A2 à H2 et recopier vers le bas pour simuler 1 000 jeux.

3) Dans la cellule J2, on souhaite afficher la moyenne des gains algébriques.
Quelle formule doit-on saisir ?

2 Conjecture

Renouveler cette simulation, en appuyant plusieurs fois sur la touche F9 (excel) ou ctrl ↑ F9 (calc).
Quel semble être le gain moyen qu'on peut espérer sur 1 000 parties ?

3 Étude théorique

1) Combien d'issues comporte l'univers ? Combien d'issues comportent 3 chiffres identiques ?

2) Dénombrer le nombre d'issues comportant exactement 2 chiffres identiques.

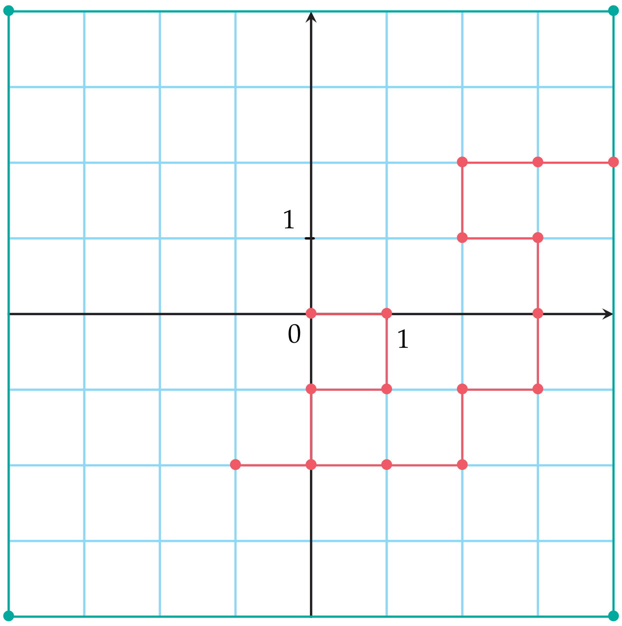
3) Soit G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique, en euros, du joueur. Déterminer la loi de probabilité de G.

4) Calculer $E(G)$. Comparer avec les résultats observés au **2)**.

TP 2 Marche aléatoire d'un robot

ALGO

Un robot se déplace dans une pièce carré de coté 8. Il peut se déplacer d'une unité dans quatre directions différentes de manière aléatoire et équiprobable. Sa position M est repérée par ses coordonnées $(x\ ;\ y)$ où x et y sont des entiers relatifs. Le robot part du point O et continue ses déplacements jusqu'à ce qu'il se cogne sur un mur et s'arrête.
On note D la variable qui donne le nombre de déplacements du robot avant sa collision avec le mur.



Le but de ce TP est d'estimer la probabilité des événements suivants :
A : « Le robot a fait moins de 20 déplacements » ;
B : « Le robot a fait entre 21 et 49 déplacements » ;
C : « Le robot a fait au moins 50 déplacements » ;
E : « Le robot touche le mur en 4 déplacements ».

1 Algorithme

Un programme écrit avec AlgoBox est présenté ci-après.

1) Compléter la ligne 10 et expliquer son rôle.

2) Programmer cet algorithme sur AlgoBox. Obtenir une série de 100 valeurs de D et remplir le tableau suivant.

	A	B	C	E
Fréquence				

3) En déduire des estimations de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P(E)$.

4) Calculer la valeur exacte de $P(E)$. Pourquoi peut-on douter de la fiabilité des estimations du **3)** ?

Travaux pratiques

```
Variables
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  y PREND_LA_VALEUR 0
  x PREND_LA_VALEUR 0
  D PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE ... FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    h PREND_LA_VALEUR
      ALGOBOX_ALEA_ENT (0,3)
    SI (h==0) ALORS
      DEBUT_SI
      x PREND_LA_VALEUR x+1
      FIN_SI
    SI (h==1) ALORS
      DEBUT_SI
      x PREND_LA_VALEUR x-1
      FIN_SI
    SI (h==2) ALORS
      DEBUT_SI
      y PREND_LA_VALEUR y+1
      FIN_SI
    SI (h==3) ALORS
      DEBUT_SI
      y PREND_LA_VALEUR y-1
      FIN_SI
    D PREND_LA_VALEUR D+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER D
FIN_ALGORITHME
```

2 Durée moyenne de parcours du robot

Comment modifier cet algorithme pour qu'il simule n parcours du robot et affiche la valeur moyenne obtenue pour D ?

Faire cette modification* et exécuter pour remplir le tableau suivant :

n	400	2 500	40 000
Valeur moyenne de D			

Comparer avec les autres élèves de la classe. Quelle interprétation peut-on donner ?

**Aide AlgoBox : Pour coller un bloc de lignes, créer une nouvelle ligne, puis dans le menu édition, copier et coller ce bloc en se plaçant sur sa première ligne.*

Récréation, énigmes

Le jeu des trois portes

Lors d'un jeu télévisé américain (*Let's Make a Deal !*), le présentateur (Monty Hall) montrait trois portes fermées au candidat. Derrière l'une d'elles se cachait une voiture et il suffisait d'indiquer la bonne porte pour gagner cette voiture.

1re étape : Le candidat désigne une porte, ensuite le présentateur ouvre l'une des deux portes autre que celle qui a été choisie et autre que celle qui cache la voiture.

2e étape : Le candidat a le choix entre maintenir son premier choix ou le modifier.

1) Écrire un algorithme qui simule 1 000 parties à ce jeu, avec un candidat qui maintient son choix.
2) Écrire un algorithme qui simule 1 000 parties à ce jeu, avec un candidat qui change son choix.
3) Quelle semble être la meilleure stratégie ?

STATISTIQUES PROBABILITÉS

3

Loi binomiale et intervalle de fluctuation

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Savoir calculer des probabilités
- Connaître la notion de variable aléatoire
- Connaître les formules des intervalles de fluctuation et de confiance vus en seconde

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Auto-évaluation

1 On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois pile et une fois face au bout des deux lancers ?

2 On considère une variable aléatoire X dont voici la loi de probabilité.

k	-6	-1	5
$P(X=k)$	0,2	0,3	0,5

Déterminer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

3 Un dé cubique est pipé : il a une probabilité plus grande de tomber sur 6.
On note p cette probabilité et on sait par ailleurs que la probabilité de tomber sur chacune des autres faces est la même.

1) p peut-il être égal à 0,1 ?

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur de p telle que :

a) la probabilité de tomber sur cinq soit de $\frac{1}{7}$;

b) l'on obtienne 5,5 « en moyenne » ;

c) la probabilité d'obtenir 6 soit trois fois plus grande que celle d'obtenir une autre face du dé.

4 Un sondage réalisé sur 1 600 personnes donne 36 % d'intentions de vote pour un candidat.
Au seuil de 95 %, donner un intervalle de confiance sur le pourcentage de la population totale ayant l'intention de voter pour ce candidat.

5 Dans la population mondiale, il y a 742 813 000 Européens sur 7 243 784 000 habitants.
Quand on tire au sort 10 000 personnes dans le monde, donner un intervalle de fluctuation, au seuil de 95 % de la fréquence d'Européens dans cet échantillon.

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Bien réussir un QCM

INFO

Dolorès s'est inscrite à un concours pour entrer en école d'ingénieur.
Celui-ci se présente sous la forme d'un QCM où, pour chaque question, il faut dire laquelle des quatre propositions est vraie.

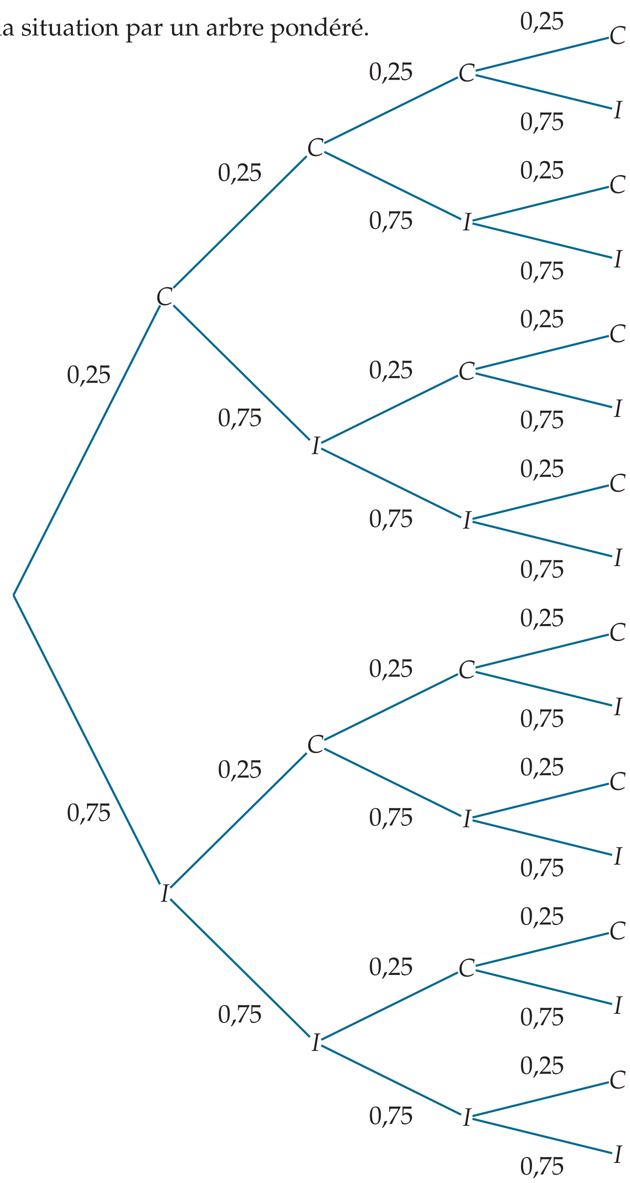
Partie 1 : Hors programme

Comme le concours a lieu en cours d'année, quatre questions portent sur des parties du programme qu'elle n'a pas vues en classe, elle décide donc d'y répondre au hasard.
Pour chaque question, on appelle :

- C l'événement : « la réponse est correcte »
- I l'événement : « la réponse est incorrecte »

Dans toute l'activité, les probabilités seront données **sous forme décimale, arrondies à 0,000 1 près.**

1) On a représenté la situation par un arbre pondéré.



Expliquer les pondérations 0,25 et 0,75.

2) a) Combien y a-t-il de chemins correspondant à trois réponses correctes ?

b) Dans chacun de ces chemins, combien y a-t-il de pondérations 0,25 et 0,75 ?

c) En déduire la probabilité que Dolorès ait exactement trois réponses correctes.

3) a) Sans regarder l'arbre, dire combien il y a de pondérations 0,25 et 0,75 dans un chemin correspondant à deux réponses correctes.

b) On peut obtenir le nombre de chemins correspondant à deux réponses correctes (dans cette expérience à quatre étapes) avec la calculatrice, sans regarder l'arbre.
Pour cela, on saisit :

Calculatrice TI

`4 Combinaison 2`

où `combinaison` s'obtient en :

- appuyant sur la touche math
- choisissant **PRB**
- choisissant **3 :Combinaison**

Calculatrice CASIO

`4C2`

où `C` s'obtient en :

- appuyant sur la touche OPTN
- choisissant ▷ puis PROB
- choisissant nCr

Vérifier le résultat obtenu sur l'arbre.

c) En déduire la probabilité que Dolorès ait exactement deux réponses correctes.

4) a) À l'aide de la calculatrice, donner le nombre de chemins correspondant à exactement une réponse correcte.

b) Combien y a-t-il de pondérations 0,25 et 0,75 sur chacun de ces chemins ?

c) En déduire la probabilité que Dolorès ait exactement une réponse correcte.

5) Déterminer la probabilité que Dolorès ait exactement :

- 0 réponse correcte
- 4 réponses correctes

6) Reproduire et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de réponses correctes à ces quatre questions.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$					

Partie 2 : Avec six questions

1) En lisant le reste des questions, Dolorès s'aperçoit qu'il y en a deux autres dont elle ne connaît pas la réponse (c'est-à-dire six en tout).
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le nombre de réponses correctes si elle décide de répondre au hasard à ces six questions.

2) La règle dans ce QCM est :

- chaque réponse correcte rapporte 1 point ;
- chaque réponse incorrecte enlève 0,5 point ;
- une absence de réponse n'ajoute et n'enlève aucun point.

a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Z donnant le gain algébrique de points pour ces six questions.

b) En déduire le nombre de points que Dolorès peut « espérer gagner ».

c) Sachant que Dolorès est certaine d'avoir répondu correctement aux quatorze autres questions, doit-elle plutôt faire le choix de ne pas répondre à ces six questions ? Argumenter.

Activités d'approche

ACTIVITÉ 2 Argent de poche aléatoire

INFO

Les parents d'Atoumassa sont tous les deux professeurs de mathématiques. Ils ont décidé que l'argent de poche hebdomadaire qu'ils donneraient à leur fille chaque semaine aurait un montant aléatoire qui suivrait une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}55$.
On appelle donc X la variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}55)$ donnant la somme d'argent de poche qu'obtiendra Atoumassa cette semaine.

Partie 1 : Avec le tableur

1) Ouvrir un logiciel de tableur.

2) • Inscrire `k` dans la cellule `A1` et `P(X=k)` dans la cellule `B1`.
- Remplir la plage `A2:A22` avec les entiers de 0 à 20 dans l'ordre croissant.

3) a) Saisir `=LOI.BINOMIALE(A2;20;0,55;0)` sous **Calc** ou `=LOI.BINOMIALE.N(A2;20;0,55;0)` sous **Excel** dans la cellule `B2` puis compléter la colonne `B` par recopie vers le bas.

b) Sélectionner la plage `B2:B22` puis faire un clic droit et :
- `Formater les celulles>Nombres>Pourcentage>OK` sous **Calc**
- `Format de cellule>Nombres>Pourcentage>OK` sous **Excel**

4) Sous Calc

Sélectionner la plage `A1:B22` puis `Insertion>Diagramme>Colonne` puis valider `Suivant` et sélectionner
- Séries de données en colonnes
- Première ligne comme étiquette
- Première colonne comme étiquette

puis appuyer sur `Terminer`

Sous Excel
- Sélectionner la plage `B2:B22` puis `Insertion>Colonne` et sélectionner le premier style
- appuyer sur le bouton `Sélectionner des données`
- sous `Étiquettes de l'axe horizontal`, appuyer sur le bouton `Modifier` et sélectionner la plage `A2:A22` puis valider

5) Où se concentre les sommes d'argent les plus probables ?

6) Inscrire `P(X<=k)` dans la cellule `C1` puis remplir la plage `C2:C22` par la méthode de votre choix.

7) Que représente concrètement la valeur inscrite dans la cellule `C12` ?

Partie 2 : Intervalle de fluctuation et niveau de confiance

1) Quelles sont les sommes d'argent qu'Atoumassa a plus de 10 % de chance de recevoir ?

2) Déterminer $P(X \geqslant 8)$ (on pourra utiliser le tableur).

3) a) Calculer $P(X \in [8\,;\,13])$.

b) Peut-on affirmer qu'Atoumassa a au moins 4 chances sur 5 d'obtenir entre 8 € et 13 € cette semaine ?

4) On pose $a = 7$, déterminer le plus petit nombre entier b tel que $P(X \in [a\,;\,b]) \geqslant 0{,}95$.

> Comme $P(X \in [a\,;\,b]) \geqslant 0{,}95$, on dit que cet intervalle est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % sur la somme d'argent que recevra Atoumassa cette semaine.

5) a) Déterminer un intervalle de la forme $[a\,;\,b]$ (où a et b sont deux entiers), le plus petit possible, tel que $P(X \in [a\,;\,b]) \geqslant 0{,}99$.

b) Interpréter ce résultat dans les termes de la situation de départ.

ACTIVITÉ 3 Passe la seconde !

On considère une population dans laquelle un certain caractère a une proportion p.
Dans ce TP, nous allons comparer des intervalles de fluctuation au seuil de 95 %, sur la fréquence du caractère dans un échantillon de taille n, obtenus par différentes méthodes.
On rappelle la formule $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ donnant l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 % vu en seconde, utilisable quand $p \in [0{,}2 \,;\, 0{,}8]$ et $n \geqslant 25$.

1) Déterminer les intervalles de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 % obtenus respectivement avec la loi binomiale et avec la formule précédente pour $n = 30$ et $p = 0{,}2$.

2) a) Donner un avantage et un inconvénient de l'intervalle de fluctuation vu en seconde (on pensera notamment aux conditions à vérifier pour pouvoir l'appliquer).

b) Même question pour l'intervalle de fluctuation obtenu avec la loi binomiale.

3) Matthieu souhaite savoir, suivant les valeurs de n et p, si les deux intervalles de fluctuation sont « proches » ou non.
Il détermine alors les intervalles de fluctuation obtenus avec les deux méthodes et réalise le tableau à double-entrée ci-dessous où :

- S signifie « satisfaisant » c'est-à-dire qu'il estime que les deux intervalles sont assez proches car l'écart sur les bornes inférieures (respectivement supérieures) des deux intervalles est inférieur à 0,02 ;
- I signifie « insatisfaisant » c'est-à-dire qu'il estime que les deux intervalles ne sont pas assez proches (avec le même critère).

n \ p	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
30	I	I	I	S	S	S	S	S	I	I	I
100	I	I	S	S	S	S	S	S	S	I	I
1000	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S

a) Comparer les intervalles obtenus à la question **1)** et expliquer le choix de Matthieu.

b) Même question pour $n = 1\,000$ et $p = 0{,}05$.

c) D'après le tableau ci-dessus, quels types de valeurs de n et p faudrait-il éviter pour pouvoir utiliser l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ sans avoir une erreur trop importante ?

ACTIVITÉ 4 Presque avec remise

1) Dans un groupe de 40 personnes, 4 ont les yeux verts.

a) Quelle est la proportion de personnes ayant les yeux verts dans ce groupe ?

b) On tire successivement trois personnes au hasard dans ce groupe, **sans remise**.

i) Faire un arbre représentant la situation.

ii) Recopier et compléter le tableau ci-dessous représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes ayant les yeux verts dans l'échantillon de trois personnes obtenu (arrondir à 0,000 1 près).

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$				

2) Dans un groupe de 10 000 personnes, 1 000 ont les yeux verts.

a) Quelle est la proportion de personnes ayant les yeux verts dans ce groupe ?

b) On en tire successivement trois au hasard, **sans remise**.

Faire un arbre et donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le nombre de personnes ayant les yeux verts dans l'échantillon de trois personnes obtenu (arrondir à 0,000 1 près).

3) Dans un groupe, la proportion de personnes ayant les yeux verts est $p = 0{,}1$. On en tire successivement trois au hasard, **avec remise** et on considère la variable aléatoire Z donnant le nombre de personnes ayant les yeux verts dans l'échantillon de trois personnes obtenu.

a) Quelle est la loi de probabilité de Z ?

b) Représenter cette loi par un tableau (arrondir à 0,000 1 près).

4) On considère une population dans laquelle un caractère a une proportion p et on en tire (sans remise) un échantillon de taille n.

D'après les questions précédentes, sous quelle condition peut-on penser que le nombre d'individus ayant le caractère dans l'échantillon suit approximativement la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$?

ACTIVITÉ 5 Centenaires !

INFO

Dans la population mondiale, la proportion de centenaires est estimée à 0,004 4 %.

Partie 1 : À Kyotango

Au Japon, la ville de Kyotango compte 58 648 habitants.

1) On souhaite déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des centenaires dans un échantillon de taille 58 648.

a) Quand on considère une population dans laquelle un caractère apparaît dans une proportion p, rappeler la formule vue en seconde de l'intervalle de fluctuation de la fréquence du caractère pour un échantillon de taille n.

Préciser les conditions d'application sur n et p pour que cette formule soit utilisable.

b) Pourquoi ne peut-on pas appliquer cette formule ici ?

2) a) Tabuler sur votre calculatrice ou un tableur la fonction $x \mapsto P(X \leqslant x)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(58\,648\,;\,0{,}000\,044)$.

b) En déduire un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de centenaires dans une ville de 58 648 habitants.

3) La municipalité de Kyotango affirme qu'il y a près d'une centaine de centenaires dans la ville.

Si cette affirmation est vraie, peut-on dire, au risque d'erreur de 5 %, que cette municipalité est représentative de la population mondiale sur ce critère ?

Partie 2 : En Basse-Normandie

En Basse-Normandie en 2007, on comptait 374 centenaires pour 1 461 000 habitants.

1) Sur ce critère, la Basse-Normandie est-elle représentative de la population mondiale ? On utilisera le tableur plutôt que la calculatrice.

2) Reprendre la question précédente par rapport à la population française dans laquelle la proportion de centenaires est de 0,023 5 %.

3) Commenter les réponses aux deux dernières questions.

1. Répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire

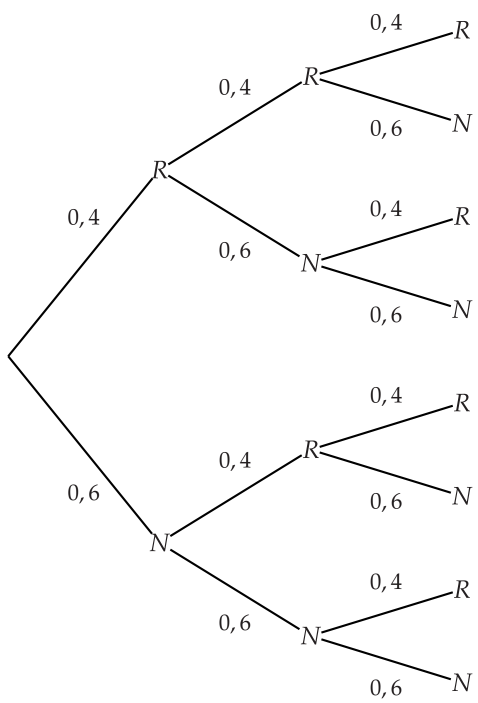
On considère le cadre suivant : on répète n fois de suite, de manière **identique** et de façon **indépendante** la même expérience aléatoire.

Exemple On dispose d'une urne contenant 100 boules : 40 boules rouges et 60 boules noires.

On effectue trois tirages successifs avec remise dans cette urne en notant à chaque fois la couleur de la boule obtenue.

Comme ce sont des tirages avec remise :
- à chaque tirage, les conditions sont identiques (il y a 100 boules dans l'urne : 40 boules rouges et 60 boules noires) ;
- les tirages sont indépendants (le résultat d'un tirage n'influence pas le suivant).

À chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule rouge est de $\dfrac{40}{100} = 0,4$ et la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{60}{100} = 0,6$ donc on peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-contre.



PROPRIÉTÉ

Les règles d'utilisation principales des arbres pondérés sont :
- chaque chemin de l'arbre correspond à un résultat dont la probabilité est le produit des probabilités inscrites sur les branches qui constituent le chemin ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser l'événement.

Exemple En utilisant l'arbre précédent, déterminer :

1) La probabilité d'obtenir trois boules rouges.
2) La probabilité d'obtenir, **dans cet ordre**, une boule noire, une boule rouge et une boule noire.
3) La probabilité d'obtenir, au bout des trois tirages, deux boules rouges et une boule noire.

Correction

1) La probabilité d'obtenir trois boules rouges est de $0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,064$.
2) La probabilité d'obtenir, **dans cet ordre**, une boule noire, une boule rouge et une boule noire, est de $0,6 \times 0,4 \times 0,6 = 0,144$.
3) La probabilité d'obtenir, au bout des trois tirages, deux boules rouges et une boule noire est $0,4 \times 0,4 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 \times 0,4 + 0,6 \times 0,4 \times 0,4 = 3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 0,288$.

2. Loi de Bernoulli

DÉFINITION

- On dit qu'une expérience aléatoire à deux issues est une **épreuve de Bernoulli**.
  Par convention, une des deux issues, de probabilité p avec $0 < p < 1$, est appelée **succès** (notée S) et l'autre est appelée échec (notée $\overline{S}$).

Issue	S	$\overline{S}$
Probabilité	p	$1-p$

- On dit que la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p.

Exemple Dans l'exemple introductif de la **partie 1**, le tirage d'une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli car il y a deux issues, avec $p = 0{,}4$ en prenant « Rouge » comme succès.

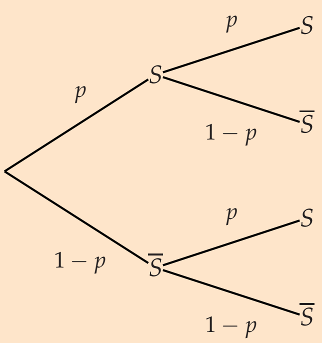
REMARQUE : Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On a :
- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

3. Schéma de Bernoulli et coefficient binomial

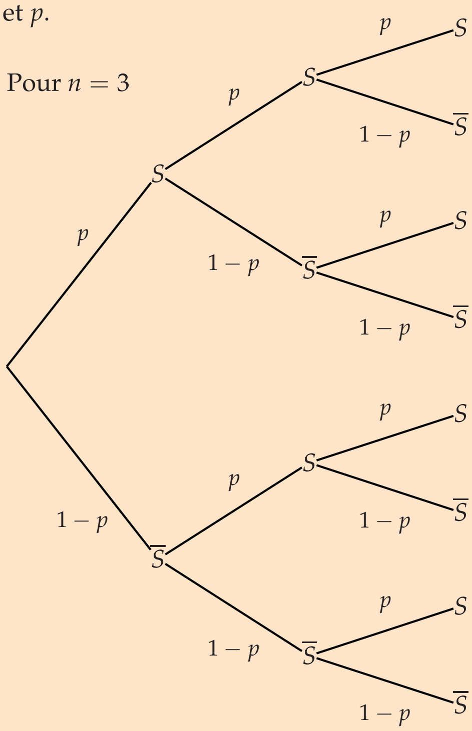
DÉFINITION

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p.
La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette épreuve de Bernoulli est appelée **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.

Pour $n = 2$



Pour $n = 3$



Exemple Dans l'exemple introductif de la **partie 1**, comme les tirages sont indépendants (puisqu'avec remise), on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}4$ (en prenant « Rouge » comme succès).

DÉFINITION

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
L'entier $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, appelé **coefficient binomial** et se lisant « k parmi n », désigne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès.

Exemple Dans l'exemple introductif de la **partie 1**, on a un schéma de Bernoulli avec $n = 3$: comme il y a 3 chemins qui mènent à 1 succès (c'est-à-dire « obtenir une boule rouge »), on a $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$.

REMARQUE : Par convention, on pose $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$.

MÉTHODE 1 Obtenir un coefficient binomial avec la calculatrice

► Ex. 15 p. 309

Exercice d'application

Déterminer $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ avec la calculatrice.

Correction

Calculatrice TI

On saisit `7 Combinaison 3`

où `Combinaison` s'obtient en :

- appuyant sur la touche math
- choisissant **PRB**
- choisissant **3 :Combinaison**

On obtient $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 35$.

Calculatrice CASIO

On saisit `7C3`

où `C` s'obtient en :

- appuyant sur la touche OPTN
- choisissant ▷ puis PROB
- choisissant nCr

PROPRIÉTÉ

Soit n et k des entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

- $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ et $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$
- $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$

PREUVE Pour le dernier point, $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$ est le nombre de chemins correspondant à $k+1$ succès dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli de $n+1$ épreuves.

- Si la première épreuve donne un succès, il faut alors encore k succès sur les n épreuves restantes, ce qui donne donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ chemins.
- Si la première épreuve donne un échec, il faut alors encore $k+1$ succès sur les n épreuves restantes, ce qui donne donc $\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$ chemins.

Il y a donc bien $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$ chemins qui correspondent à $k+1$ succès pour $n+1$ épreuves.

REMARQUE : Le tableau suivant donnant tous les coefficients binomiaux est appelé « **Triangle de Pascal** ».

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...							

- Comme $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ et $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$, il y a des 1 dans la première colonne et la diagonale.
- Comme $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$, on peut remplir chaque ligne à partir de la précédente, par exemple, on a $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $6 + 4 = 10$.
- On observe sur ce triangle que $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$.

4. Loi binomiale

DÉFINITION

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On dit que la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus sur les n épreuves suit la **loi binomiale de paramètres** n **et** p, notée $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Exemple Dans l'exemple introductif de la **partie 1** , on note X le nombre de boules rouges obtenues après les trois tirages.
Comme on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$ (puisque « Rouge » correspond à un succès), X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$. On a :

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}.$$

PREUVE Quand on considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, on trouve sur chaque chemin qui correspond à k succès :

- la probabilité p sur k branches
- la probabilité $1 - p$ sur $n - k$ branches

donc la probabilité correspondant à chacun de ces chemins est $p^k \times (1-p)^{n-k}$.
Comme il y $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ chemins, on a $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$.

Exemple Soit X suivant la loi $\mathscr{B}(4\,;\,0{,}3)$.
On a $P(X = 3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} 0{,}3^3(1-0{,}3)^{4-3} = 4 \times 0{,}3^3 \times 0{,}7 = 0,0756$.

MÉTHODE 2 Déterminer une probabilité $P(X = k)$ à l'aide de la calculatrice ► Ex. 16 p. 309

La calculatrice permet d'obtenir directement $P(X = k)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Exercice d'application

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$.
Déterminer $P(X = 1)$ à l'aide de la calculatrice.

Correction

Calculatrice TI

- On accède au menu **distrib** en appuyant sur la touche 2nde puis la touche var.
- On choisit `0:binomFdp(` puis on entre dans l'ordre la valeur des paramètres n, p et k séparés par des virgules pour obtenir

```
binomFdp(6,0.2,1
)
             .393216
```

Calculatrice Casio

- Dans le menu **RUN**, on appuye sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** puis **Bpd**.
- On saisit dans l'ordre la valeur des paramètres k, n et p séparés par des virgules pour obtenir

```
BinominalPD(1,6,0.2)
            0.393216
```

On trouve ainsi $P(X = 1) \approx 0,393$.

MÉTHODE 3 Déterminer une probabilité $P(X \leqslant k)$ à l'aide de la calculatrice ► Ex. 16 p. 309

La calculatrice permet d'obtenir directement $P(X \leqslant k)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Exercice d'application

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,6$.
Déterminer $P(X \leqslant 5)$ à l'aide de la calculatrice.

Correction

Calculatrice TI

- On accède au menu **distrib** en appuyant sur la touche 2nde puis la touche var.
- On choisit `A:binomFRép(` puis on entre dans l'ordre la valeur des paramètres n, p et k séparés par des virgules pour obtenir

```
binomFRép(7,0.6,
5)
            .8413696
```

Calculatrice Casio

- Dans le menu **RUN**, on appuye sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** puis **Bcd**.
- On saisit dans l'ordre la valeur des paramètres k, n et p séparés par des virgules pour obtenir

```
BinominalCD(5,7,0.6)
           0.8413696
```

On trouve ainsi $P(X \leqslant 5) \approx 0,841$.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La première propriété se « devine » de la façon suivante : pour une épreuve de Bernoulli, l'espérance d'un succès est p.
Pour une répétition de n épreuves de Bernoulli, l'espérance du nombre de succès est $n \times p$.

5. Échantillonnage

Dans ce paragraphe, X désigne une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ et a et b deux réels.

DÉFINITION

On dit que $[a\,;\,b]$ est un **intervalle de fluctuation au seuil de** 95 % **ou 0,95** du nombre de succès si $P(X \in [a\,;\,b]) \geqslant 0{,}95$.

REMARQUES :

- Cela veut dire que si l'on réalise l'expérience, il y a plus de 95 % de chance que le nombre de succès soit dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.
- On définit de la même manière un intervalle de fluctuation à d'autres seuils mais en pratique on utilisera le plus souvent les seuils 95 % et 99 %.
- Pour un seuil donné, il existe plusieurs et même une infinité d'intervalles de fluctuation.

PROPRIÉTÉ

L'intervalle $[a\,;\,b]$ où :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$

est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

MÉTHODE 4 Déterminer un intervalle de fluctuation

► Ex. 29 p. 311

Tabuler la loi binomiale avec la calculatrice permet de déterminer a et b.

Exercice d'application

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}3)$.
Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.

Correction

Calculatrice TI

- Appuyer sur f(x) puis sur 2nde et stats pour accéder au menu **distrib** et saisir `Y1=binomFRép(20,0.3,X)`.
- Tabuler la fonction :

X	Y1
0	8E-4
1	.00764
2	.03548
3	.10709

- Déterminer les valeurs de `X` pour lesquelles `Y1` dépasse pour la première fois 0,025 et 0,975 : on obtient $a = 2$ et $b = 10$.

Calculatrice CASIO

- Dans le menu **TABLE**, appuyer sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** et saisir `Y1=BinomialCD(X,20,0.3)`.
- Tabuler la fonction :

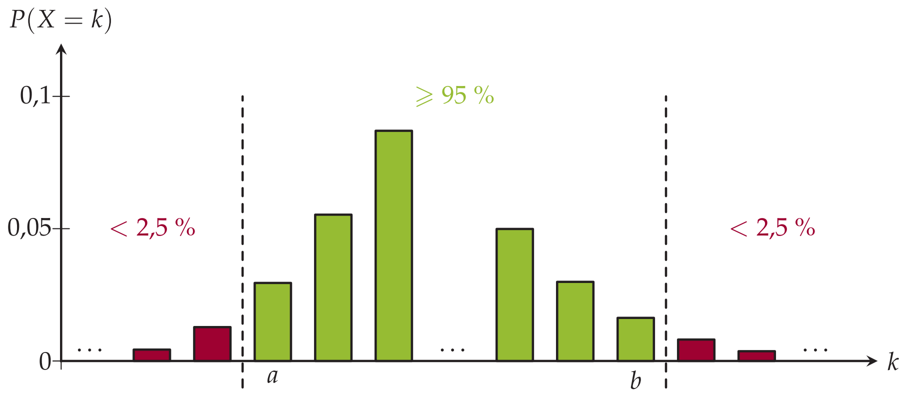
X	Y1
0	7.9E-4
1	7.6E-3
2	0.0354
3	0.107

- Déterminer les valeurs de `X` pour lesquelles `Y1` dépasse pour la première fois 0,025 et 0,975 : on obtient $a = 2$ et $b = 10$.

L'intervalle $[2\,;\,10]$ est donc un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.

REMARQUES : Dans la propriété précédente :

- on peut représenter la situation par le graphique suivant où le diagramme en bâtons représente la loi binomiale :



- c'est cet intervalle que l'on donnera généralement quand on demandera de déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, même s'il en existe d'autres.

Dans la suite, l'intervalle $[a\ ;\ b]$ désigne l'intervalle de la propriété précédente.

PROPRIÉTÉ

On considère la variable aléatoire $F = \dfrac{X}{n}$ donnant la fréquence de succès.
L'intervalle $\left[\dfrac{a}{n}\ ;\ \dfrac{b}{n}\right]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de cette fréquence.

PREUVE On a $\dfrac{a}{n} \leqslant \dfrac{X}{n} \leqslant \dfrac{b}{n} \Leftrightarrow a \leqslant X \leqslant b$ donc $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant \dfrac{X}{n} \leqslant \dfrac{b}{n}\right) = P(a \leqslant X \leqslant b)$.
Comme $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0{,}95$, on en déduit que $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant F \leqslant \dfrac{b}{n}\right) \geqslant 0{,}95$.

PROPRIÉTÉ

On considère une population dans laquelle la proportion d'un certain caractère est p.
Si la population est suffisamment grande, quand on prélève un échantillon de n individus, on peut considérer que le nombre d'individus ayant le caractère suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Ainsi, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %

- du nombre d'individus ayant le caractère dans l'échantillon est $[a\ ;\ b]$;
- de la fréquence du caractère dans l'échantillon est $\left[\dfrac{a}{n}\ ;\ \dfrac{b}{n}\right]$.

REMARQUES :

- Le fait que la population soit suffisamment grande permet d'assimiler le prélèvement d'un échantillon de taille à n à **des tirages avec remise** donc indépendants.
- Si, après prélèvement de l'échantillon, on observe que la fréquence est bien dans l'intervalle de fluctuation, on dit que cet échantillon est **représentatif** de la population, sinon, on dit qu'il ne l'est pas, au seuil de 95 %.

Cours - Méthodes

Exemple Dans la population française, il y a 24,4 % de « moins de 20 ans » (source : *ined*).

1) On prélève au hasard un échantillon de 250 personnes dans la population française. Donner un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des « moins de 20 ans » dans cet échantillon.

2) Dans un village de 250 habitants, la proportion de « moins de 20 ans » est 28,5 %. Ce village est-il représentatif de la population française sur ce critère ?

Correction

1) Comme la population française est suffisamment grande pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise, le nombre de « moins de 20 ans » dans cet échantillon suit la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $\frac{24,4}{100} = 0{,}244$ d'après la propriété précédente.

- En tabulant cette loi avec la calculatrice, on obtient qu'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de « moins de 20 ans » dans cet échantillon est $[48\ ;\ 75]$.
- Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de « moins de 20 ans » dans cet échantillon est donc $\left[\frac{48}{250}\ ;\ \frac{75}{250}\right]$ soit $[0{,}192\ ;\ 0{,}3]$.

2) Comme $\frac{28{,}5}{100} = 0{,}285 \in [0{,}192\ ;\ 0{,}3]$, ce village est représentatif de la population française.

REMARQUE : Si l'on avait utilisé la formule de l'intervalle de fluctuation vue en seconde, on aurait obtenu $\left[0{,}024\,4 - \frac{1}{\sqrt{250}}\ ;\ 0{,}024\,4 + \frac{1}{\sqrt{250}}\right]$ soit approximativement $[0{,}18\ ;\ 0{,}31]$.
Ce résultat est proche de $[0{,}192\ ;\ 0{,}3]$ obtenu avec la loi binomiale : ce sera toujours le cas dans les conditions d'application de cette formule ($0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$ et $n \geqslant 25$).

MÉTHODE 5 Rejeter ou non une hypothèse

► Ex. 38 p. 312

Dans une population, on peut faire l'hypothèse que la proportion d'un certain caractère est p puis, à l'aide d'un intervalle de fluctuation et de l'effectif ou de la fréquence dans un échantillon prélevé, choisir de rejeter ou non cette hypothèse.

Exercice d'application

Un candidat à l'élection présidentielle affirme que 54 % de la population lui est favorable.
Lors d'un sondage réalisé sur 1 000 personnes, 523 personnes se sont déclarées favorables à ce candidat.
Peut-on rejeter ou non la proportion de 54 % donnée par le candidat, au seuil de 95 % ?

Correction

- Sous l'hypothèse que la proportion de personnes favorables au candidat est bien de 54 %, en tabulant la loi $\mathscr{B}(1000\ ;\ 0{,}54)$ avec la calculatrice, on obtient que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % dans un échantillon de taille 1000 est $[509\ ;\ 571]$.
- Le nombre de personnes favorables dans l'échantillon est 523 qui appartient bien à $[509\ ;\ 571]$ donc, au seuil de 95 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la proportion est de 54 %.

REMARQUES :

- Par abus de langage, on dit parfois que l'on « accepte l'hypothèse » plutôt que l'on « ne rejette pas l'hypothèse ».
- Plutôt que dire que l'on rejette ou non une hypothèse « au seuil de 95 % », on peut aussi dire qu'on la rejette ou non « au risque d'erreur de 5 % ».

Activités mentales

1 Une pièce truquée a une probabilité de $\frac{3}{4}$ de tomber sur face lorsqu'on la lance.
Sara envisage de jouer au jeu suivant : on lance la pièce, et on observe le résultat obtenu :

- si la pièce tombe sur pile, on gagne 8 €
- si la pièce tombe sur face, on perd 4 €

Doit-on conseiller à Sara de jouer à ce jeu ?

2 On lance quatre fois de suite une pièce equilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile ?

3 Une urne contient des boules rouges, des boules noires et des boules vertes. Elle contient deux fois plus de boules rouges que de boules noires, et trois fois plus de boules vertes que de boules rouges.
On tire au hasard une boule dans l'urne.
Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

4 Simplifier les nombres suivants :

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$

2) $14 \times \left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^3$

3) $1000 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right)^8$

4) $45 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{6}{5}\right)^3$

5 Zehuan joue à un jeu avec un dé cubique équilibré. S'il obtient 5 ou plus au résultat du dé, il gagne 10 €, sinon il perd 4 €.

1) Pourquoi cette expérience aléatoire est-elle une expérience de Bernoulli ?
2) On note X son gain après une partie.
Déterminer l'espérance de X.

6 X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$. Déterminer l'espérance et la variance de X.

7 On lance une pièce un grand nombre de fois et on note X le nombre de « Pile » obtenus.
Associer chacune des quatre propositions à sa traduction sous forme d'inégalité :

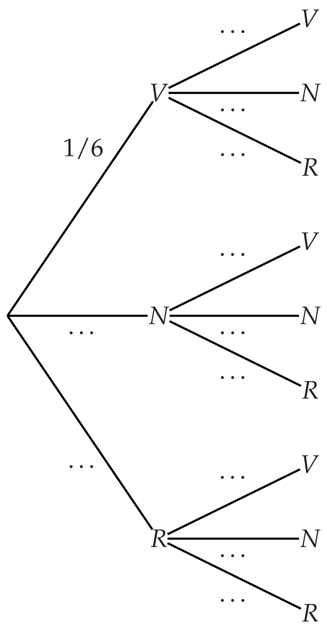
- Obtenir au moins 7 « Pile »
- Obtenir moins de 7 « Pile »
- Obtenir au plus 7 « Pile »
- Obtenir plus de 7 « Pile »

- $X > 7$
- $X < 7$
- $X \geqslant 7$
- $X \leqslant 7$

Répétition événements indépendants

8 On considère un dé cubique équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1) Recopier et compléter l'arbre suivant représentant la situation.



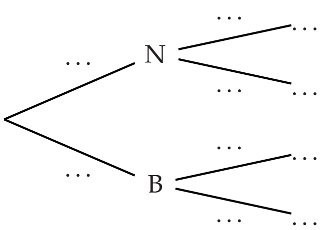
2) Calculer la probabilité pour qu'à la fin du jeu, les deux faces obtenues soient noires.
3) Soit l'événement A : « À la fin du jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{7}{18}$.
4) Calculer la probabilité pour qu'à la fin du jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.

9 Chaque jour, Natacha et Ben tirent au sort pour savoir qui va faire la vaisselle.
Pour cela, ils lancent une pièce :

- si le résultat est « Pile », Natacha fait la vaisselle ;
- sinon, c'est Ben qui fait la vaisselle.

Natacha a fourni la pièce en question : cette dernière a une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tomber sur « Face ».
On s'intéresse à la répartition des tours de vaisselle durant quatre jours.

1) Expliquer pourquoi l'on peut considérer que chaque lancer de pièce est indépendant du précédent.
2) On a tracé le début de l'arbre représentant la situation ci-dessous. Le recopier et le compléter pour qu'il représente la situation sur les quatre jours.



3) Déterminer la probabilité que seule Natacha ait fait la vaisselle durant ces quatre jours.
4) Déterminer la probabilité qu'il y ait eu une juste répartition des tâches durant ces quatre jours.

10 « C'est la faute du bus »

Le bus que Laure doit emprunter pour se rendre au lycée doit passer par deux feux.

Chacun de ces feux fonctionne de la manière suivante, chaque minute, il reste :

- 36 secondes au vert ;
- 3 secondes à l'orange ;
- 21 secondes au rouge.

On suppose que les deux feux fonctionnent de manière indépendante.

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
2) Quelle est la probabilité que le bus rencontre deux feux verts ?
3) Quelle est la probabilité que les deux feux rencontrés soient de la même couleur ?
4) On suppose que le bus s'arrête systématiquement lorsque le feu passe à l'orange.
   Quelle est la probabilité qu'il soit obligé de s'arrêter au moins une fois ?
5) À chaque feu rouge ou orange, lorsque le bus s'arrête, cela lui fait perdre 20 secondes.
   a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le temps perdu à ces deux feux.
   b) En moyenne, combien de temps Laure perd-elle à cause des feux ?

Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

11 Chaque matin, Alain passe à la boulangerie.
Une fois sur cinq, il prend deux pains au chocolat et, le reste du temps, il en prend un seul.

1) On étudie le nombre de viennoiseries qu'Alain a pris ce matin. Expliquer pourquoi on est dans la situation d'une épreuve de Bernoulli.
2) Alain paie toujours avec une pièce de 2 €.
   On note X la variable aléatoire donnant la somme d'argent qui lui est rendue ce matin.
   Quelle loi suit X sachant qu'un pain au chocolat coûte 1 € ?

12 Victor joue au jeu suivant : on tire une lettre au hasard dans le mot « Mathématiques ».

- Si la lettre obtenue est une voyelle, il gagne 9 €.
- Sinon, il perd 8 €.

Partie A

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Victor après une partie.

1) Expliquer pourquoi X ne suit pas la loi de Bernoulli.
2) Déterminer l'espérance et la variance de X.
3) Faut-il conseiller à Victor de jouer à ce jeu ?

Partie B

Victor décide de jouer quatre parties successives.

1) Expliquer pourquoi cette expérience est un schéma de Bernoulli dont on précisera les paramètres.
2) Faire un arbre représentant la situation.
3) Déterminer la probabilité que Victor gagne les quatre parties.
4) On note Y son gain algébrique après quatre parties.
   a) Déterminer l'espérance de Y.
   b) Victor a-t-il intérêt à multiplier le nombre de parties ?

13 Un élève joue aux fléchettes sur une cible du foyer de son lycée et il ne rate sa cible qu'une fois sur 25.
On suppose que tous ses tirs sont indépendants.

1) Déterminer la probabilité qu'il rate la cible quatre fois de suite.
2) Déterminer au bout de combien de tirs la probabilité qu'il rate au moins une fois la cible sera supérieure à $0,5$.

Loi binomiale

14 Répondre aux questions sans calculatrice.

1) Donner $\binom{9}{0}$ et $\binom{9}{9}$.

2) On donne $\binom{9}{3} = 84$ et $\binom{9}{2} = 36$.

Donner $\binom{9}{6}$ et $\binom{9}{7}$ puis déterminer $\binom{10}{7}$.

15 ► MÉTHODE 1 p. 301

Déterminer, si besoin à l'aide de la calculatrice, les coefficients binomiaux suivants :

1) $\binom{13}{0}$ **2)** $\binom{15}{6}$ **3)** $\binom{15}{9}$ **4)** $\binom{18}{1}$

Dans les exercices **16** à **18**, X, Y et Z désigne des variables aléatoires. On arrondira au millième.

16 ► MÉTHODE 2 p. 303 et ► MÉTHODE 3 p. 303

X suit $\mathscr{B}(6\ ;\ 0{,}4)$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités suivantes :

1) $P(X = 2)$ **3)** $P(X \leqslant 4)$ **5)** $P(X > 3)$

2) $P(X = 0)$ **4)** $P(X \leqslant 6)$ **6)** $P(X \geqslant 5)$

17 Y suit une loi binomiale avec $P(Y \leqslant 15) = 0,65$ et $P(Y \leqslant 19) = 0,875$. Déterminer :

1) $P(Y > 15)$ **2)** $P(16 \leqslant Y \leqslant 19)$

18 Z suit la loi $\mathscr{B}(150\ ;\ 0,35)$. Déterminer :

1) $P(X = 50)$ **3)** $P(X > 40)$

2) $P(30 \leqslant X \leqslant 50)$ **4)** $P(X \leqslant 50)$

19 **Représentation graphique d'une loi binomiale**

1) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(4\ ;\ 0{,}3)$.

a) Tabuler $k \mapsto P(Z = k)$ sur la calculatrice.

b) Construire un diagramme en bâtons représentant la loi de probabilité de Z.

2) Représenter graphiquement la loi $\mathscr{B}(6\ ;\ 0{,}7)$.

20 Lamine joue aux échecs contre un ordinateur et la probabilité qu'il gagne une partie est 0,65.

Il décide de jouer sept parties contre l'ordinateur.

On suppose que le résultat de chaque partie est indépendant des autres.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de parties qu'il gagne contre l'ordinateur sur les sept.

1) a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.

b) Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement trois parties ?

c) Quelle est la probabilité qu'il gagne plus de la moitié des parties ?

2) Il décide de changer le niveau de difficulté en « expert » et la probabilité qu'il gagne une partie contre l'ordinateur devient $0,05$.

Il décide de jouer à nouveau une série de sept parties contre l'ordinateur. Quelle est la probabilité qu'il en gagne au moins une ?

21 D'après des études statistiques, il naît plus de garçons que de filles en France.

Lors d'une naissance, la probabilité que le bébé soit un garçon est de $0,51$.

Pour une famille de six enfants (on suppose qu'il n'y a pas de jumeaux), on note X la variable aléatoire donnant le nombre de filles.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Déterminer la probabilité que cette famille n'ait que des garçons.

3) Déterminer la probabilité que cette famille ait autant de garçons que de filles.

22 Une usine produit des grille-pain, certains étant défectueux, et on suppose que la probabilité qu'un grille-pain soit défectueux est égale à $0,03$.

On prélève au hasard un échantillon de 100 grille-pain dans la production d'une journée et on admet que cette production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 grille-pain.

On considère la variable aléatoire X qui, à ce prélèvement de 100 grille-pain, associe le nombre de grille-pain défectueux.

Tous les résultats seront arrondis au centième.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Quelle est la probabilité qu'il y ait 96 grille-pain en bon état dans ce prélèvement ?

3) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins trois grille-pain sont défectueux » ?

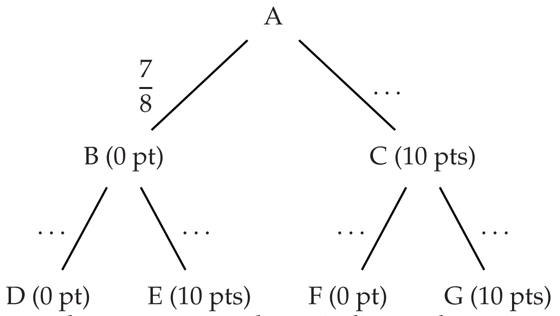
4) a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

b) Calculer $P(X \leqslant E(X))$.

23 **D'après BAC**

Un joueur dispose d'une table inclinée où une bille, lancée d'un point A, peut suivre différents chemins. Elle rencontre plusieurs nœuds sur son chemin. À chaque fois, la probabilité qu'elle prenne le chemin de gauche est de $\frac{7}{8}$.

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1) Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme de fraction.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance de X.

2) Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.
   On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   a) Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. Arrondir au millième.
   b) Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. Arrondir au millième.

24 Une tombola est organisée dans une école.

La directrice de l'école affirme qu'un billet sur trois est gagnant.

1) Bob a acheté quatre billets et il annonce qu'il est sûr de gagner.
   On admet que l'achat de ces quatre billets est assimilable à un tirage avec remise et on note X le nombre de billets gagnants parmi les quatre.
   a) Déterminer la probabilité que ses quatre billets soient gagnants.
   b) Déterminer la probabilité qu'aucun de ses billets ne soit gagnant.

2) Combien de parties peut-il espérer gagner ?

25 **Une question d'adresse** ALGO

Quand il tire du milieu de terrain de basket, Joe marque le panier avec une probabilité de $0,1$.

Il tente sa chance n fois de suite du milieu de terrain et on suppose que les lancers sont indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis.

1) Quelle loi suit X ?

2) Déterminer la probabilité que Joe réussisse exactement deux lancers en fonction de n et $\binom{n}{2}$.

3) Déterminer la probabilité que Joe réussisse au moins un lancer en fonction de n.

4) On considère l'algorithme suivant, écrit à l'aide d'Algobox.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  p PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (p<0.5) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    p PREND_LA_VALEUR 1-pow(0.9,n)
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

   Rappel : `pow(0.9,n)` signifie $0,9^n$.
   a) Que fait cet algorithme ?
   b) Déterminer avec la calculatrice quelle valeur est renvoyée par l'algorithme.

5) Joe souhaite connaître le nombre n de lancers à effectuer pour que la probabilité qu'il réussisse au moins un panier soit supérieure à 0,95.
   Modifier l'algorithme précédent pour qu'il renvoie le nombre n de lancers qu'il devra tenter.

26 Un ascenseur tombe en panne avec une probabilité de $0,015$ chaque jour et une réparation coûte 500 euros.

On suppose que la panne (ou non) de l'ascenseur est indépendante de celles des jours précédents.

1) Quelle est la probabilité que l'ascenseur tombe exactement une fois en panne durant le mois de janvier ?
2) En moyenne, combien peut-on prévoir de dépenses de réparation pour une année ?

27 ALGO

On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Liste des variables utilisées
    E,p,p' : réel
    n,i : entiers
Traitement
    Demander n
    Demander p
    Donner à E la valeur de 0
    Pour i variant de 0 à n faire
        Donner à p' la valeur de (n i) p^i (1 − p)^(n−i)
        Donner à E la valeur de E+i*p'
    Fin Pour
    Afficher E
```

1) Concrètement, que fait cet algorithme ?
2) Sans calculatrice, dire ce qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur rentre $n = 20$ et $p = 0,6$.

28 Chaque semaine, Fabienne boit un certain nombre de cafés selon ses envies.

Elle a remarqué que le nombre hebdomadaire X de cafés pris au distributeur de sa gare RER suivait une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,2$.

1) Chaque café coûte 35 centimes.
   Combien doit-elle prévoir de dépenser en moyenne chaque semaine ?
2) Cette semaine, elle décide de ne pas dépenser plus de 5 euros.
   Quelle est la probabilité qu'elle ne puisse pas boire autant de cafés qu'elle le souhaite ?
3) À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, déterminer quel montant d'argent elle doit au minimum prévoir pour être certaine, dans 90 % des cas, de pouvoir se payer tous ses cafés.

Intervalle de fluctuation

29 ► MÉTHODE 4 p. 304

On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(15\,;\,0,4)$.

1) Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.
2) En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de succès.

30 Même exercice avec Y suivant la loi $\mathscr{B}(11\,;\,0,65)$.

31 On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(5\,000\,;\,0,8)$.

1) On cherche à déterminer l'intervalle $[a\,;\,b]$ où :
   - a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$;
   - b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

   a) Sur la calculatrice, tabuler $k \mapsto P(X \leqslant k)$ avec un pas de 1 000.
   b) En déduire un encadrement de a d'amplitude 1 000.
   c) Faire de même pour b.
   d) Affiner ces encadrements et en déduire a et b.
   e) En déduire l'intervalle de fluctuation de la fréquence de succès au seuil de 95 %.
2) Déterminer de même l'intervalle de fluctuation de la fréquence de succès au seuil de 99 %.

32 Même exercice que le précédent avec Y suivant le loi $\mathscr{B}(12\,487\,;\,0,71)$.

33 70 % des Français portent des lunettes (source : *ifop*).

1) a) On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de porteurs de lunettes dans un échantillon de 200 Français pris au hasard.
   Quelle loi suit X ? Justifier.
   b) En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de porteurs de lunettes dans cet échantillon puis de la fréquence correspondante.
   c) Déterminer l'intervalle de fluctuation de cette fréquence vu en seconde et le comparer avec le précédent.
2) On se place dans une rue piétonne dans laquelle, sur 200 passants, 146 portent des lunettes.
   Cette rue est-elle représentative de la population sur ce critère ?

S'entraîner

34 En 2012, 43 % des Français n'ont lu aucun livre.

1) En utilisant la loi binomiale, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des personnes n'ayant pas lu de livre en 2012, dans un échantillon de taille 853.

2) Dans un lycée de 853 élèves, 23 élèves ont déclaré ne pas avoir lu de livre en 2012.
Ce lycée est-il représentatif de la population ? Pouvait-on s'y attendre ?

35 Dans une promotion de 123 étudiants en mathématiques, 7 ont déclaré ne pas pratiquer d'activité sportive régulière.

Cette promotion est-elle représentative de la population globale des étudiants dans laquelle 22 % des individus ont une activité sportive régulière ?

36 Au poker Texas Hold'em, au début de chaque main, chaque joueur reçoit deux cartes.

La probabilité d'obtenir une « paire servie », c'est-à-dire deux as, deux rois, deux dames, etc., est de 5,88 %.

Lors d'une partie, Bertrand, qui a joué 120 mains et a obtenu 4 paires servies, se plaint d'avoir été particulièrement malchanceux.

Que peut-on en penser ?

37 Dans la population brésilienne, la proportion de grossesses donnant lieu à la naissance de jumeaux est d'environ 1 %.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de grossesses donnant lieu à la naissance de jumeaux, au Brésil, dans un échantillon de taille 6 170 (arrondir les bornes à 10^{-4} près).

2) Une étude portant sur la ville de Cândido Godói entre 1959 et 2008 montre que, sur 6 170 grossesses, 92 ont donné lieu à la naissance de jumeaux.
La ville de Cândido Godói est-elle représentative de la population brésilienne sur ce critère ?

3) Dans cette même étude, on observe que dans le quartier de Linha Natal, sur 333 grossesses, 5 ont donné lieu à la naissance de jumeaux.
Ce quartier est-il représentatif de la ville sur ce critère ? Pour répondre, on admettra que le nombre de grossesses à Cândido Godói entre 1959 et 2008 est suffisamment grand pour assimiler ces 333 grossesses à des tirages identiques avec remise.

38 ► MÉTHODE 5 p. 306

Sur un flacon de shampooing, on peut lire : « 97 % de taux de satisfaction ».

1) Sous cette hypothèse, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des clients satisfaits dans un échantillon de 200 clients.

2) Un supermarché mène une étude sur 200 clients et obtient 190 clients satisfaits par le shampooing.
   a) Quel est la fréquence des clients satisfaits dans cet échantillon ?
   b) Doit-on rejeter ou non l'affirmation du fabricant de shampooing au seuil de 95 % ?

39 Un habitant du sud de la France affirme que dans sa ville, il y a du soleil « 90 % du temps ».

1) On considère le tableau ci-contre où X suit la loi $\mathscr{B}(365\,;\,0{,}9)$.
En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de jours de soleil dans cette ville, sous l'hypothèse qu'il y ait du soleil 90 % du temps.

2) L'année dernière, il y a eu du soleil 325 jours.
Doit-on rejeter ou non l'affirmation de cet habitant au seuil de 95 % ?

k	$P(X \leqslant k)$
315	0,014
316	0,021
317	0,031
318	0,044
319	0,062
...	...
338	0,964
339	0,977
340	0,986
341	0,991
342	0,995

40 Une association de lutte contre la discrimination se voit présenter les cas de deux entreprises :

- l'entreprise Savamal dans laquelle 21 des 53 employés sont des femmes ;
- l'entreprise Cébon dans laquelle 459 des 1027 employés sont des femmes.

Cette association peut-elle penser, au risque d'erreur de 5 % que l'une ou l'autre de ces entreprises pratique la discrimination ? Argumenter.

41 En 2012, 29 % des français possédaient un smartphone.

D'après une étude réalisée en 2013 par le Credoc, et portant sur 2 215 personnes, ce nombre est passé à 39 %.

Peut-on affirmer au seuil de 99 % que le pourcentage de français équipés d'un smartphone n'est plus de 29 % ?

42 Dans une imprimerie, la proportion des journaux imprimés qui présentent un défaut est de 1,2 %.
L'imprimeur décide de changer ses presses puis prélève 900 journaux dont 6 présentent un défaut.
Peut-on affirmer au seuil de confiance de 95 % que la proportion de journaux présentant des défauts a changé ?

43 Un fabricant de tickets de jeux à gratter affirme que 40 % de ses tickets sont gagnants.
Djanany achète 10 de ces tickets.

1) Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de tickets gagnants dans cet échantillon sous l'hypothèse que le fabricant dise la vérité.

2) Parmi les 10 tickets, 1 seul est gagnant. Djanany peut-elle penser, au risque d'erreur de 5 %, que le fabricant ment sur la proportion de tickets gagnants.

3) **a)** Même question si elle avait obtenu 8 tickets gagnants.
b) En quoi la situation serait-elle alors paradoxale ?

4) **a)** Donner le meilleur (c'est-à-dire le plus petit) intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la forme $[a\,;\,10]$.
b) Reprendre la question 2 avec cet intervalle et interpréter le résultat obtenu.

44 Discrimination ?

Dans le système judiciaire américain, lors de la constitution d'un jury, les procureurs ont le droit d'exclure des jurés potentiels sans justification.
De 1973 à 1990, dans le district judiciaire de Chattahoochee en Géorgie, les procureurs de l'État ont utilisé 83 % de ces droits d'exclusion contre des jurés afro-américains bien que ceux-ci constituent 34 % de la population locale.

En conséquence, sur 10 jurys jugeant des afro-américains risquant la peine de mort, 6 n'en contenaient aucun (source : *The associated press-Stephen B. Bright*).

1) Sachant qu'un jury est constitué de 12 jurés, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de jurés afro-américains dans un jury.

2) **a)** Plus précisément, quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun juré afro-américain dans un jury ?
b) Quelle est la probabilité que, sur 10 jurys choisis en toute indépendance, au moins la moitié ne contiennent pas de juré afro-américain ? Conclure.

Problèmes

45 D'après BAC

39 % de la population française est du groupe sanguin A+. On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes de groupe A+ dans un échantillon de 183 personnes prises au hasard dans la population française.

1) **a)** Sous quelle hypothèse X suit-elle une loi binomiale ?
b) Pourquoi cette hypothèse est-elle raisonnable ?
c) On admet que cette hypothèse est vérifiée, préciser alors les paramètres de X.

2) On interroge 183 donneurs de sang et, parmi eux, 34 % sont du groupe A+.
Les donneurs de sang sont-ils représentatifs de la population française sur ce critère ?

46 D'après BAC

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que 10 % de la population française présente à la naissance une malformation cardiaque de type anévrisme.
Elle décide alors de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème d'anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1) **a)** Définir la loi de la variable aléatoire X.
b) Déterminer $P(X = 35)$.
c) Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

2) **a)** On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \dfrac{X}{400}$.
Déterminer l'intervalle de fluctuation de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.
b) Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Que peut-on en penser ?

Approfondir

47 Mme Tortue est presque sourde de l'oreille gauche et 60% du temps, elle dort du côté gauche.

- Lorsqu'elle dort du côté gauche, elle entend le réveil avec une probabilité de $0,95$;
- de l'autre côté, elle entend le réveil avec une probabilité de $0,2$.

1) Déterminer la probabilité que Mme Tortue entende le réveil le matin.

2) On admet que le fait d'entendre le réveil un matin est indépendant du fait de l'entendre les autres jours.
Quelle est la probabilité que Mme Tortue dorme tranquillement durant une semaine sans entendre ses réveils ?

48 Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.
Alors qu'Anne se rend à son lycée cinq jours par semaine, elle a constaté qu'elle a une probabilité de $0,065$ d'arriver en retard le matin.

Partie A : Durant une semaine

On note X le nombre de jours où elle est arrivée en retard au lycée.

1) Quelle hypothèse doit-on faire pour que X suive une loi binomiale ?
Dans ce cas, préciser les paramètres n et p.
Dans la suite on admettra que X suit bien cette loi.

2) Déterminer la probabilité qu'elle arrive en retard deux fois dans la semaine.

3) En moyenne, combien de jours va-t-elle arriver en retard durant la semaine ?

4) Quelle est la probabilité qu'elle soit toujours à l'heure durant la semaine ?

Partie B : Durant l'année

L'année scolaire compte 36 semaines.

1) Durant une année scolaire, sur combien de semaines complètes Anne « peut-elle compter » ?

2) Quelle est la probabilité qu'elle soit à l'heure pendant au moins 30 semaines complètes ?

Partie C : Comme un lundi

1) Quel est le nombre moyen de lundis où Anne sera à l'heure durant une année scolaire ?

2) Quelle est la probabilité que durant une semaine donnée, elle soit en retard au moins le lundi et le vendredi ?

49 On considère le triangle de Pascal ci-dessous.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	…
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6							

1) **a)** Lire $\binom{5}{3}$ et $\binom{5}{5}$ dans le tableau.

b) Déterminer $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{4}$ et $\binom{6}{5}$.

2) Démontrer que si n et k sont deux entiers tels que $k \leqslant n-2$, alors :
$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}.$$

50 **Des identités remarquables à la pelle** INFO

On considère deux réels a et b.

1) Dans cette question, on écrira les formules par puissance décroissante de a.

a) Développer $(a+b)^2$.

b) Développer $(a+b)^3$.

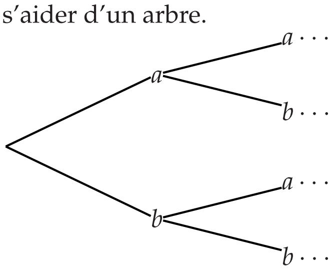
c) Développer $(a+b)^4$.

2) En observant ces développements et les lignes $n=2$, $n=3$ et $n=4$ du triangle de Pascal de l'exercice précédent, que peut-on conjecturer ?

3) **a)** En admettant que la conjecture faite à la question précédente est vraie, donner la forme développée de $(a+b)^6$.

b) Vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

4) Démontrer la conjecture faite à la question **2)**.
On pourra s'aider d'un arbre.



Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Pour X suivant une loi binomiale

- calculer $P(X = k)$
- calculer $P(X \leqslant k)$ ou $P(X < k)$
- calculer $P(X \geqslant k)$ ou $P(X > k)$

À partir d'une situation concrète

- utiliser la loi binomiale
- déterminer un intervalle de fluctuation
- interpréter un intervalle de fluctuation

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,7$.

51 $P(X = 15)$ vaut environ :

(a) 0 (b) $0,6$ (c) $0,189$ (d) $0,092$

52 $P(X \leqslant 18)$ vaut environ :

(a) $0,171$ (b) $0,126$ (c) $0,659$ (d) $0,72$

53 $P(X \geqslant 16)$ vaut environ :

(a) $0,189$ (b) $0,323$ (c) $0,677$ (d) $0,811$

Dans une usine de glaces, la probabilité qu'un cône glacé ait un défaut est de 0,003.
On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de cônes défectueux dans un lot de 2 000 cônes pris au hasard et on admet que X suit un loi binomiale.

54 Les paramètres de X sont :

(a) $n = 2\,000$ et $p = 0,003$ (b) $p = 2\,000$ et $n = 0,003$ (c) $n = 2\,000$ et $p = 0,3$ (d) $p = 2\,000$ et $n = 0,3$

55 Si un client reçoit un lot de 2 000 cônes avec au moins 12 cônes défectueux, alors ce lot lui est échangé.
La probabilité qu'un lot soit échangé est :

(a) $\approx 0,991\,3$ (b) $\approx 0,008\,7$ (c) $\approx 0,019\,9$ (d) $\approx 0,011\,2$

56 Une étude réalisée en 2014 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.
Un intervalle de confiance au seuil 95 % du nombre de personnes consommant régulièrement des glaces dans un échantillon de 900 personnes est :

(a) [733 ; 776] (b) [733 ; 777] (c) [734 ; 776] (d) [734 ; 777]

57 Sur les 900 lycéens d'un lycée, 88,3 % ont déclaré consommer régulièrement des glaces.
Peut-on penser, au seuil de 95 %, que ce lycée est représentatif de la population sur ce critère ?

(a) oui (b) non

Travaux pratiques

TP 1 Vive le vent, vive le vent

INFO

Pour réaliser une enquête commerciale, un employé consacre chaque jour 5 min de son temps à interroger des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante.
Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1 10 % de « bavards » et 20 personnes interrogées

Dans cette partie, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1.
L'employé interroge 20 personnes de manière indépendante.

1) On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes acceptant de répondre sur les 20 personnes interrogées.
Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale puis donner ses paramètres.

2) On considère les événements :
- A : « Au moins une personne accepte de répondre »
- B : « Moins de trois personnes acceptent de répondre »
- C : « Trois personnes ou plus acceptent de répondre »

Déterminer à l'aide de la calculatrice les probabilités des événements A, B et C. On arrondira au millième.

2 10 % de « bavards » et n personnes interrogées

On considère maintenant que l'employé interroge indépendamment n personnes, toujours en supposant que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1.

1) Quelle loi suit la variable aléatoire Y donnant le nombre de personnes acceptant de lui répondre sur les n personnes interrogées ?

2) On décide d'utiliser le tableur pour pouvoir tester plus facilement différentes valeurs de n.

a) Lancer un logiciel de tableur.

b) Reproduire la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F
1	k	P(Y=k)			Valeur de n :	50
2	0				Valeur de p :	0,1
3	1					
4	2					
5	3					
6	4					

c) Entrer dans la cellule `B2` la formule :
- `=LOI.BINOMIALE.N(A2;F$1;F$2;0)` sous excel
- `=LOI.BINOMIALE(A2;F$1;F$2;0)` sous openoffice ou libreoffice

puis compléter la colonne `B` par recopie vers le bas.

d) Déterminer dans la feuille de tableur la probabilité qu'au moins 3 personnes acceptent de répondre.

e) Déterminer le nombre minimal de personnes que l'enquêteur va devoir interroger pour que la probabilité qu'au moins 3 personnes acceptent de répondre dépasse 0,5.

3 Avec 10 personnes et p inconnues

On considère maintenant que l'employé ne pourra aborder que 10 personnes dans la journée et que la probabilité p qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est inconnue.

1) Quelle loi suit la variable aléatoire Z donnant le nombre de personnes acceptant de lui répondre sur les 10 personnes interrogées ?

2) Reproduire la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C
1	p	P(Z<=2)	P(Z>=3)
2	0		
3	0,1		
4	0,2		
5	0,3		
6	0,4		

3) On obtient la valeur $P(X \leqslant k)$ pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p avec la fonction :
- `=LOI.BINOMIALE.N(k;n;p;1)` sous excel
- `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)` sous open office ou libreoffice

En utilisant cette fonction, compléter la colonne `B` puis la colonne `C`.

4) Quelle doit-être la valeur minimale de p pour que la probabilité qu'au moins trois personnes acceptent de répondre dépasse 0,5 ? On donnera une valeur approchée de p au dixième.

5) Reprendre la question précédente avec une valeur approchée de p au millième.

TP 2 Intervalle de fluctuation et calculatrice

INFO ALGO

On considère le programme suivant :

Calculatrice TI

```
:Prompt N
:Prompt P
:0→I
:binomFdp(N,P,I)→F
:While F≤0.025
:I+1→I
:binomFRép(N,P,I)→F
:End
:Disp I
:While F<0.975
:I+1→I
:binomFRép(N,P,I)→F
:End
:Disp I
```

Calculatrice CASIO

```
?→N↵
?→P↵
0→I↵
BinominalPD(I,N,P)→F↵
While F≤0.025↵
I+1→I↵
BinominalCD(I,N,P)→F↵
WhileEnd↵
I◢
While F<0.975↵
I+1→I↵
BinominalCD(I,N,P)→F↵
WhileEnd↵
I◢
```

1) Que fait ce programme ?

2) Le saisir dans votre calculatrice puis le tester avec $n = 36$ et $p = 0,4$.

3) Modifier le programme pour qu'il donne les bornes d'un intervalle de fluctuation au seuil de 99 %.

4) Modifier le programme pour qu'il :
- demande à l'utilisateur de rentrer le seuil de A % souhaité
- donne les bornes d'un intervalle de fluctuation au seuil de A %.

TP 3 Va, je ne te rejette point !

INFO

Hidéo est Japonais et ne parle que le japonais et l'anglais.
Son professeur de mathématiques lui a lancé un défi : il lui a donné un texte d'une page et lui a demandé de déterminer dans quelle langue est écrit ce texte.
Hidéo a alors eu l'idée de faire l'analyse fréquentielle du texte, il a compté le nombre de e dans le texte, il en a trouvé 279 sur 1536 lettres.

1 En français

En français, la fréquence moyenne d'apparition de la lettre e est de 14,7 %.
Sous cette hypothèse, nous allons déterminer à l'aide du tableur un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de e dans un échantillon de 1 536 lettres.

1) Ouvrir un tableur.

2) Saisir `k` dans la cellule `A1` et `P(X<=k)` dans la cellule `B1`.

3) **a)** Saisir `0` dans la cellule `A2`.

b) Saisir dans la cellule `B2` :
- `=LOI.BINOMIALE(A2;1536;0,147;1)` sous Calc
- `=LOI.BINOMIALE.N(A2;1536;0,147;1)` sous Excel

c) Recopier ces deux cellules vers le bas jusqu'à ce que k soit égal à 1 536.

4) En déduire un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de e dans un échantillon de 1 536 lettres.

5) Au seuil de 95 %, doit-on rejeter ou non l'hypothèse que le texte est écrit en français ?

2 En néerlandais ou en allemand

1) En néerlandais, la fréquence moyenne d'apparition de la lettre e est de 17,3 %.

a) Reprendre les questions de la partie 1 sous l'hypothèse que le texte est en néerlandais.

b) Peut-on affirmer que le texte est écrit en néerlandais, au seuil de 95 % ?

2) En allemand, la fréquence moyenne d'apparition de la lettre e est de 16,4 %.

a) Reprendre les questions de la partie 1 sous l'hypothèse que le texte est écrit en allemand.

b) Peut-on affirmer que le texte est écrit en allemand, au seuil de 95 % ?

3) Expliquer la distinction entre « accepter » et « ne pas rejeter » au seuil de 95 %.

TP 4 À l' unilatéral

INFO

En France, en 2 006, on estimait à 6,7 % le pourcentage de la population souffrant d'asthme (c'est-à-dire ayant eu une crise d'asthme lors de l'année écoulée) (source : *irdes*).
On considère le quart sud-ouest de la France regroupant les régions Aquitaine, Limousin et Midi-Pyrénées, comptant 6,7 millions d'habitants.

1) **a)** Avec la calculatrice, calculer $P(Y = 0)$ où Y suit la loi $\mathscr{B}(6\,700\,000\,;\,0{,}067)$.

b) Que se passe-t-il ? Expliquer pourquoi.

2) On décide de travailler sur des milliers d'habitants en considérant la variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(6\,700\,;\,0{,}067)$ pour laquelle on a :

$P(X \leqslant k)$	...	408	409	410	...	487	488	489	...
k	...	0,023	0,026	0,029	...	0,969	0,972	0,975 2	...

Donner un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % sur la fréquence de personnes asthmatiques parmi les habitants du quart sud-ouest (arrondir à 0,001 près).

3) Dans le quart sud-ouest, le pourcentage de personnes asthmatiques est de 7,8 %.
Expliquer pourquoi l'on peut dire que le quart sud-ouest n'est pas représentatif sur ce critère, au risque d'erreur de 5 %.

4) **a)** Déterminer $P\left(\dfrac{X}{6\,700} \in [0\,;\,0{,}073]\right)$.
On dit que $[0\,;\,0{,}073]$ est un **intervalle de fluctuation unilatéral à droite** au seuil de 97,5 %.
b) Quelle phrase vous semble la plus précise ?
- Les habitants du quart sud-ouest sont plus sujets à l'asthme, au risque d'erreur de 5 %.
- Les habitants du quart sud-ouest sont plus sujets à l'asthme, au risque d'erreur de 2,5 %.

5) En tabulant $P(X \leqslant k)$ à partir de $k = 482$ avec la calculatrice ou le tableur, déterminer :
- un intervalle de fluctuation unilatéral à droite au seuil de 95 %
- un intervalle de fluctuation unilatéral à droite au seuil de 99 %

TP 5 Loi géométrique tronquée

INFO ALGO

Klaus et Antoine jouent à un jeu de société.
Klaus est arrivé sur la dernière case du jeu avec 4 vies, il doit alors lancer le dé (à 6 faces) et :
- s'il obtient 6, il gagne la partie
- s'il n'obtient pas 6, il perd une vie et relance le dé
- s'il épuise ainsi ses 4 vies, il perd la partie

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.

2) Quelle est la probabilité que Klaus :
- gagne la partie à son troisième lancer ?
- perde la partie ?

3) On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de lancers que fait Klaus pour gagner (par convention, même si cela ne paraît pas très naturel, s'il perd toutes ses vies sans faire 6, on considère que $X = 0$).
Donner la loi de probabilité de X (on donnera les résultats sous forme de fraction).

4) Klaus a écrit l'algorithme suivant sous Algobox, simulant la variable aléatoire X :

```
VARIABLES
 k EST_DU_TYPE NOMBRE
 V EST_DU_TYPE NOMBRE
 Vdepart EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
 LIRE Vdepart
 V PREND_LA_VALEUR Vdepart
 k PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE(V... ET k...)FAIRE
   DEBUT_TANT_QUE
   V PREND_LA_VALEUR V-1
   k PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,6)
  FIN_TANT_QUE
 SI (V==0 ET k!=6) ALORS
  DEBUT_SI
  AFFICHER "X=0"
  FIN_SI
  SINON
   DEBUT_SINON
   AFFICHER "X="
   AFFICHERCALCUL Vdepart-V
   FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

où `Vdepart` correspond au nombre de vies de Klaus quand il arrive sur la dernière case.

Compléter les pointillés pour que cet algorithme fonctionne.

Travaux pratiques

Récréation, énigmes

Scrabble en français

Rechercher sur internet les fréquences d'apparition des différentes lettres de l'alphabet en langue française.

En déduire une répartition possible des lettres du jeu de Scrabble français sur les 100 jetons portant des lettres et vérifier avec le vrai jeu.

Bizarre, bizarre...

Sur le triangle de Pascal, Johnny remarque quelque chose de bizarre lorsqu'il effectue la somme des coefficients en ligne. Expliquer pourquoi.

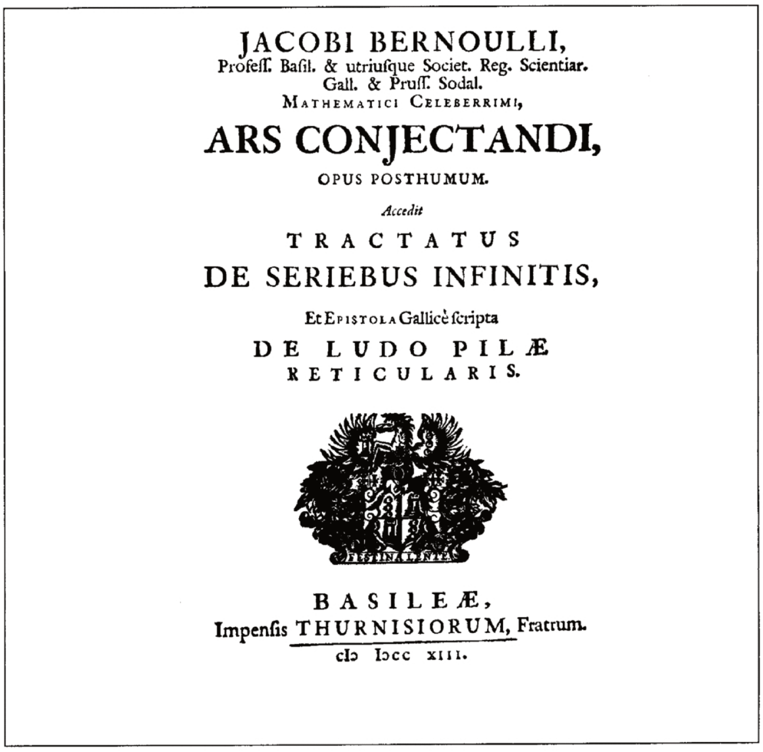
Une histoire de binômes

Jakob (ou encore Jacques) Bernoulli (1654-1705) était un mathématicien Suisse, fondateur d'une dynastie de mathématiciens, les Bernoulli.

On trouve les premières traces des coefficients binomiaux et de la loi binomiale dans son ouvrage *Ars Conjectandi* (l'art de conjecturer !) publié huit ans après sa mort, en 1713.

Dans *Ars Conjectandi*, les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ apparaissent dans le développement du binôme $(a+b)^n$, d'où leur nom.

Ils ont donné son appellation à la loi dite binomiale et sont également connus comme les « coefficients de Bernoulli ».


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc XIII.

Comment gagner à coup sûr

Manu se voit proposer de jouer au jeu suivant : il mise une somme d'argent puis lance un dé et

- s'il obtient plus de 5, il récupère sa mise et gagne le montant de sa mise
- sinon il perd sa mise

Il décide d'adopter la stratégie suivante : à la première partie, il mise 1 € puis

- s'il gagne, il se retire avec ses gains
- s'il perd, il rejoue en doublant sa mise et ce, jusqu'à la victoire.

1) Quand il gagne au bout de n lancers, combien gagne-t-il (on tiendra compte des sommes déjà misées).
2) Manu affirme « c'est sûr qu'avec cette méthode, je ne gagne pas beaucoup mais au moins, je suis sûr de gagner ».
   a) Que penser de cette affirmation ?
   b) Il dispose de 1 000 € sur son compte en banque.
   Quelle est la probabilité qu'il se rende compte de son erreur lors d'une partie ?

Fiche 1 Utiliser un tableur

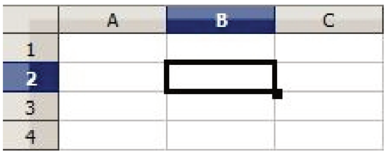
Dans cette fiche, les méthodes ne spécifiant pas le logiciel utilisé sont similaires pour les différents types de tableurs (Libre Office ou Open Office Calc et Excel). Dans ce cas, les captures d'écrans sont issues du logiciel Calc.

1 Adresse, cellule et plage

Une feuille de calcul est un tableau dont chacune des cases, appelées **cellules**, est repérée horizontalement par un nombre entier strictement positif et verticalement par une lettre, ce qui permet de donner l'**adresse** de la cellule.

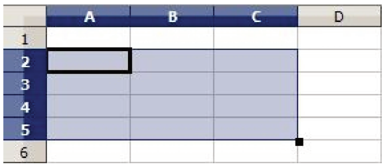
Exemple :

- La cellule sélectionnée ci-contre est la cellule B2 :

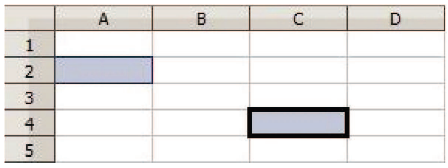


- On peut également sélectionner une **plage**, c'est-à-dire plusieurs cellules.

Pour sélectionner la plage `A2:C5`, on maintient le clic gauche appuyé :



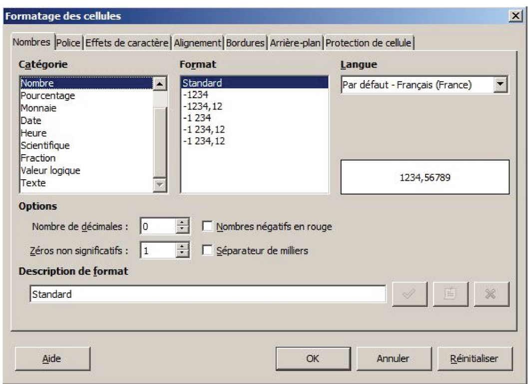
Pour sélectionner la plage `A2;C4`, on appuie sur la touche Ctrl et on clique gauche :



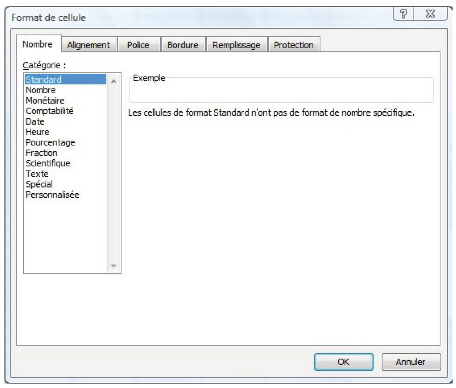
Attention, `A2;C4` désigne la plage constituée des cellules A2 et C4 et non pas toutes les cellules de A2 à C4 qui s'écrit `A2:C4`.

2 Format de la cellule

Lorsque que l'on fait un clic droit sur une cellule ou une plage de cellules, on peut changer son **format** en choisissant Formater les cellules (sous Calc) ou Format de cellule (sous Excel). On obtient le menu suivant :



Sous Libre Office ou Open Office Calc



Sous Excel

Remarques :

- La catégorie Nombre permet d'afficher les nombres sous leur forme décimale.
  On peut notamment y régler le nombre de chiffres affichés après la virgule dans Nombre de décimales.
- La catégorie Pourcentage convertit automatiquement les formes décimales en pourcentage.
  Par exemple, si l'on saisit 0,1 le tableur affiche 10 %.
  On peut également y régler le nombre de chiffres affichés après la virgule.
- La catégorie Texte permet de saisir du texte.

3 Calcul avec le tableur

Dans une cellule, on peut écrire un calcul précédé du signe = en utilisant les commandes usuelles +, -, *, / ou ^.
Le tableur écrira alors le résultat du calcul dans la cellule.
Exemple : Si l'on écrit `=5+3^2` dans la cellule A1 et que l'on valide avec la touche Entrée, le tableur écrira 14 dans A1.
Attention, dans le tableur, un calcul commence toujours par le symbole =.

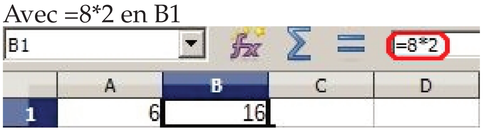
4 Formule et adressage

Dans une feuille de calcul, on peut faire des calculs en faisant référence à une cellule donnée.
Exemple :

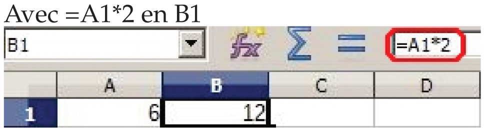
- Si l'on saisit une valeur dans la cellule A1 et que l'on veut afficher son double dans la cellule B1, on sélectionne B1, on y écrit la **formule** `=A1*2`. On valide avec la touche Entrée :

donne


- L'avantage d'écrire la formule `=A1*2` et non pas `=8*2` dans la cellule B1 est que la formule s'adapte si l'on change la valeur en A1, par exemple si l'on y écrit 6 :

Avec =8*2 en B1


La valeur en B1 ne s'adapte pas, cela reste 16.

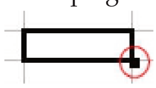
Avec =A1*2 en B1


La valeur en B1 s'adapte, cela donne 12.

Remarques :

- Quand on sélectionne une cellule, la formule inscrite dedans est affichée dans la **barre de saisie** (voir encadré rouge sur les captures d'écrans précédentes).
- On peut modifier la formule inscrite dans une cellule en sélectionnant cette cellule et en modifiant directement la formule dans la barre de saisie.

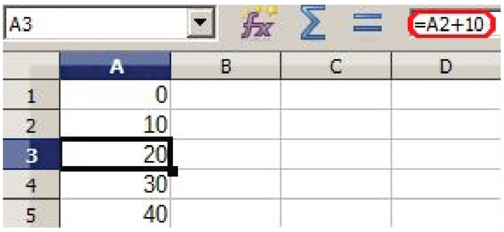
5 Poignée de recopie

Lorsque l'on sélectionne une cellule ou une plage de cellules, un petit carré apparaît en bas à droite : c'est la **poignée de recopie** :

Elle permet d'automatiser les calculs.

Exemple :

Si l'on veut écrire 0, 10, 20, 30, …, 100 dans la colonne A :

- on écrit `0` dans la cellule A1 ;
- on écrit `=A1+10` dans la cellule A2, on obtient bien 10 ;
- on sélectionne la poignée de recopie, on maintient appuyé et on recopie vers le bas jusqu'à obtenir 100.



Remarques :

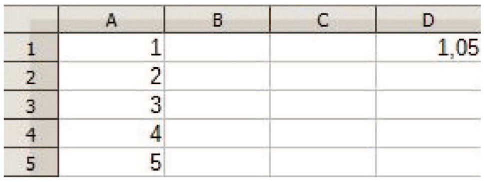
- Lorsque l'on recopie vers le bas, dans les adresses des cellules, les 1 deviennent 2, les 2 deviennent 3, etc.
- Dans l'exemple précédent, on observe que les formules se sont bien adaptées dans chaque cellule. Par exemple, en A3, il est inscrit `=A2+10` (voir capture ci-dessus).
- On peut aussi recopier vers la droite (les A deviennent B, les B deviennent C, etc.), la gauche ou le haut.

6 Utilisation du dollar

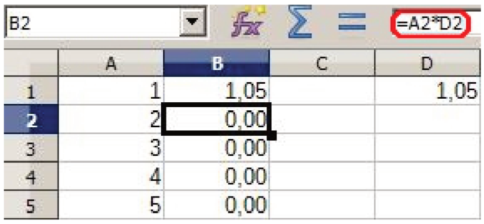
Le symbole `$` permet de **bloquer** la lettre ou le nombre d'une adresse dans une formule.

Exemple :

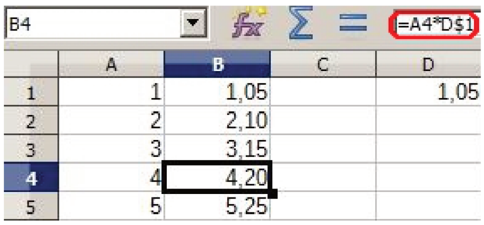
- Dans la feuille de calcul ci-contre, on souhaite multiplier tous les nombres de la colonne A par le nombre présent dans la cellule D1.



- Si l'on saisit la formule `=A1*D1` dans la cellule B1 et que l'on recopie vers le bas, on obtiendra `=A2*D2` dans la cellule B2.



- Cela ne convient pas (il faudrait `=A2*D1` en B2) : il faut donc bloquer le « 1 » de D1.
  Cela se fait à l'aide du symbole `$` qui bloque la lettre ou le nombre qui le suit directement dans l'adresse d'une cellule. On saisit donc la formule `=A1*D$1` en B1.



  Quand on recopie vers le bas, on constate que le 1 de D1 est bien bloqué dans les cellules recopiées. Par exemple en B4, on a bien `=A4*D$1`.

Remarque :

On aurait aussi pu saisir la formule `=A1*$D$1` en B1 mais ce n'est pas utile car le D n'a pas besoin d'être bloqué puisque l'on ne recopie pas la formule vers la droite.

7 Quelques fonctions usuelles

Le tableur dispose de certaines **fonctions** auxquelles on a accès dans l'onglet Insertion>Fonction ou directement grâce au raccourci : sous Calc sous Excel

`ALEA()`	Donne un nombre décimal au hasard entre 0 et 1
`ALEA.ENTRE.BORNES(a;b)`	Donne un nombre entier au hasard entre a et b inclus
`ECARTYPEP(plage)`	Donne l'écart-type des valeurs de la plage
`LOI.BINOMIALE(k;n;p;0)` sous Calc `LOI.BINOMIALE.N(k;n;p;0)` sous Excel	Donne $P(X = k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres n et p
`LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)` sous Calc `LOI.BINOMIALE.N(k;n;p;1)` sous Excel	Donne $P(X \leqslant k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres n et p
`MAX(plage)`	Donne le plus grand nombre des valeurs de la plage
`MIN(plage)`	Donne le plus petit nombre des valeurs de la plage
`MOYENNE(plage)`	Donne la moyenne des valeurs de la plage
`NB.SI(plage;a)`	Donne le nombre de fois où la valeur a apparaît dans la plage
`QUARTILE(plage;numéro du quartile)`	Donne le quartile (spécifié par le numéro du quartile : 1 correspond à Q_1, 2 à la médiane et 3 à Q_3) des valeurs de la plage
`SOMME(plage)`	Donne la somme des valeurs de la plage

Remarques :

- Quand on utilise ces fonctions, il faut nécessairement commencer la formule par le symbole =.
- Pour les fonctions `ALEA` et `ALEA.ENTRE.BORNES`, on peut relancer une simulation en appuyant sur `CTRL+SHIFT+F9` (sous Calc) ou `F9` (sous Excel).

8 Graphiques

Sous Libre Office ou Open Office Calc

On accède à l'assistant de diagramme dans l'onglet Insertion>Diagramme ou grâce au raccourci

Sous Excel

Dans l'onglet Insertion, on choisit directement le type de graphique voulu parmi ceux proposés :

Courbe d'une fonction

La 1re colonne correspond aux abscisses des points et la 2e colonne aux ordonnées.

Sous Libre Office ou Open Office Calc

- On sélectionne les deux colonnes (avec éventuellement les en-têtes en 1re ligne).
- On appelle l'assistant de diagramme.
- On choisit XY(dispersion) puis le style souhaité (points seuls, points et lignes, etc.).
- Si l'on veut donner des titres, on peut le faire à l'étape 4 : Eléments du diagramme.

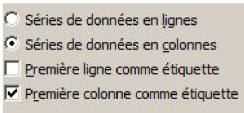
Sous Excel

- On sélectionne la 2e colonne (sans en-tête).
- On choisit l'onglet Insertion puis le graphique Ligne Ligne puis on choisit le style.
- On appuie sur le bouton Sélectionner des données puis sur le bouton Modifier (sous « Étiquettes de l'axe horizontal (abscisse) ») et on sélectionne la première colonne (sans en-tête) et on valide.
- Si l'on veut donner des titres, on choisit un modèle parmi ceux proposés ici.

Diagramme en bâtons

La 1^re^ colonne correspond aux valeurs et la 2^e^ colonne aux effectifs ou aux fréquences d'une série statistique.

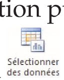
Sous Libre Office ou Open Office Calc

- On sélectionne les deux colonnes (sans les en-têtes).
- On appelle l'assistant de diagramme.
- On choisit Colonne et le premier style  puis Suivant>>.
- On règle ce menu ainsi : 

- On va à l'étape 4 : Eléments du diagramme et on décoche Afficher la légende (on peut aussi donner des titres aux axes).

Sous Excel

- On sélectionne la 2^e^ colonne (sans en-tête).
- On choisit l'onglet Insertion puis le graphique Colonne  puis le premier style.

- On appuie sur le bouton  puis sur le bouton  (sous « Étiquettes de l'axe horizontal (abscisse) ») et on sélectionne la plage des valeurs (sans en-tête) et on valide.

- Si l'on veut donner des titres, on choisit un modèle parmi ceux proposés ici.

Remarque :

L'axe des abscisses n'est pas régulièrement gradué si les effectifs ne sont pas régulièrement espacés, ce n'est donc pas un « vrai » diagramme en bâtons.

Diagramme circulaire (ou camembert)

La 1^re^ colonne correspond aux différentes modalités et la 2^e^ colonne aux effectifs ou aux fréquences d'une série statistique.

Sous Libre Office ou Open Office Calc

- On sélectionne la plage de données (sans les en-têtes).
- On appelle l'assistant de diagramme.
- On choisit Secteur et le premier style puis Terminer.

Sous Excel

- On sélectionne les deux colonnes (sans les en-têtes).
- On choisit l'onglet Insertion puis le graphique Secteurs  puis le premier style et on valide.

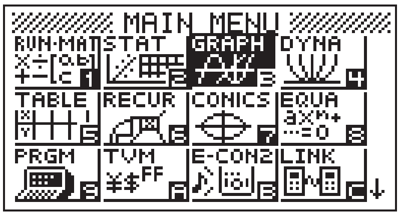
Fiche 2 Utiliser une calculatrice Casio

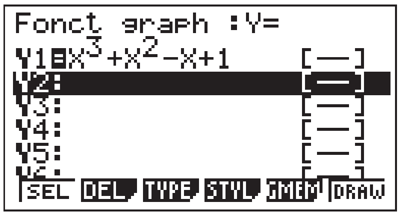
1 Travailler avec les fonctions

On veut obtenir un tableau de valeurs avec un pas de 0,5 et représenter graphiquement la fonction $x \mapsto x^3 + x^2 - x + 1$ sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$.

■ Définir une fonction

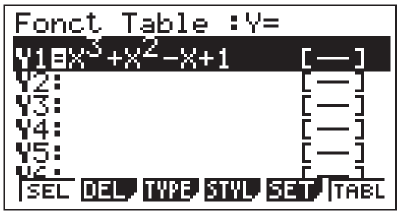
Depuis le menu principal [menu], sélectionner le sous-menu [GRAPH] puis saisir l'expression de la fonction.



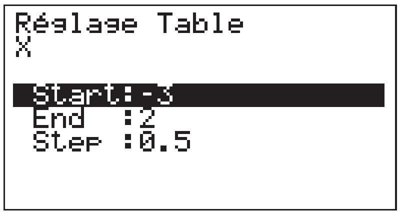


■ Obtenir un tableau de valeurs

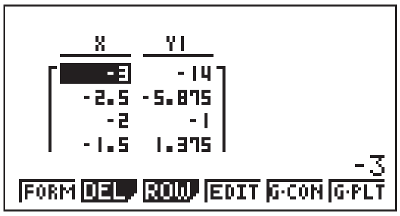
Depuis le menu principal [menu], sélectionner le sous-menu [TABLE]. On y retrouve la (ou les) fonction(s) déjà saisie(s).



[F5] (SET) pour accéder aux paramètres. On précise le début 2 et la fin de l'intervalle -3, ainsi que le pas 0,5 (c'est-à-dire de combien en combien vont les valeurs de x).

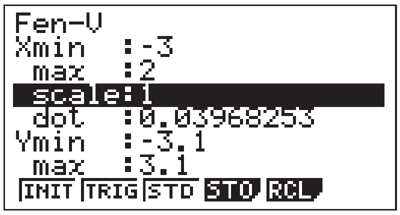


[EXE] pour valider les paramètres puis [F6] (TABL) pour afficher le tableau de valeurs.

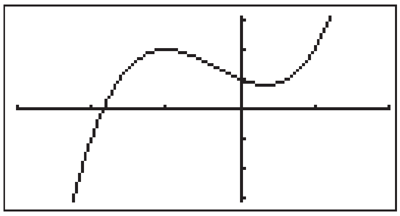


■ Tracer une courbe

Depuis le sous-menu [GRAPH], [SHIFT] [V-WINDOW] pour accéder aux paramètres de la fenêtre graphique.



[EXE] pour valider la fonction puis [F6] (DRAW) pour afficher la courbe sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$.



2 Écrire un algorithme

Créer un programme

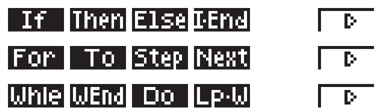
Depuis le menu principal menu, sélectionner le sous-menu PRGM.

F3 (NEW) pour créer un nouveau programme.
Taper le nom du programme puis EXE pour valider.

Éditer un programme

La liste des commandes principales s'obtient depuis SHIFT PRGM.

(SHIFT PRGM) F1 (COM) permet d'accéder aux commandes de tests conditionnels et de boucles.



La liste des tests de relations s'obtient depuis (SHIFT PRGRM) F6 (>) REL

Lancer un programme

Depuis le sous-menu affichant la liste des programmes, la touche F1 (EXE) permet d'exécuter le programme surligné.

Modifier un programme

Depuis le sous-menu affichant la liste des programmes, la touche F2 (EDIT) permet de modifier le programme surligné.

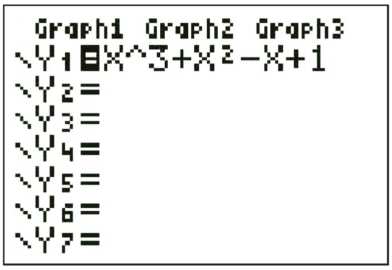
Fiche 3 Utiliser une calculatrice TI

1 Travailler avec les fonctions

On veut obtenir un tableau de valeurs avec un pas de 0,5 et représenter graphiquement la fonction $x \mapsto x^3 + x^2 - x + 1$ sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.

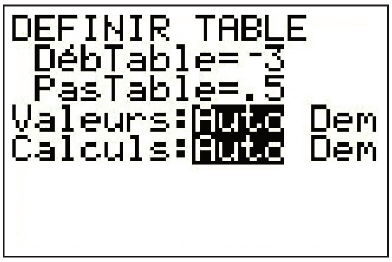
■ Définir une fonction

Depuis le menu f(x), saisir l'expression de la fonction.

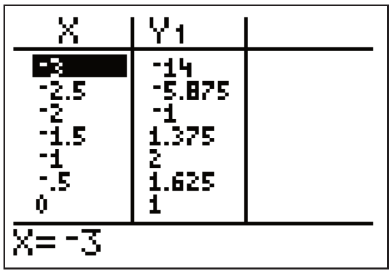


■ Obtenir un tableau de valeurs

Depuis le menu déf table (2nde puis fenêtre), on précise le premier terme -3 et le pas du tableau de valeurs $0,5$ (c'est-à-dire de combien en combien vont les valeurs de x).

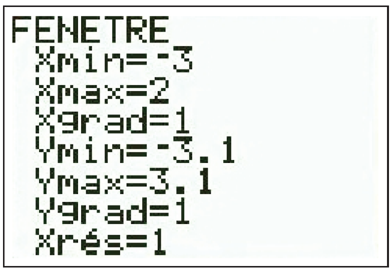


Enfin, on obtient le tableau de valeurs dans le menu table (2nde puis graphe).

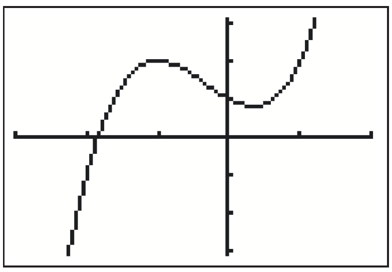


■ Tracer une courbe

On règle les paramètres de la fenêtre graphique dans le menu fenêtre.



On affiche la courbe avec la touche graphe.



2 Écrire un algorithme

Sélectionner le menu PRGM. On a accès aux différents sous-menus.

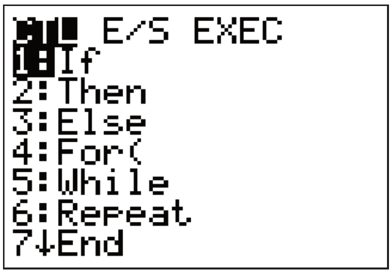
Créer un programme

Sélectionner le sous-menu NOUV pour créer un nouveau programme.
Taper le nom du programme puis entrer pour valider.

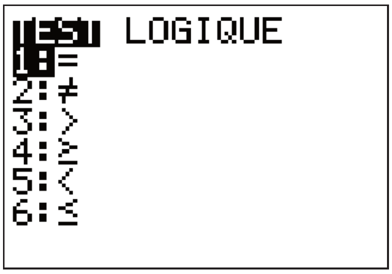
Éditer un programme

Lorsqu'un programme est en cours d'écriture, on a accès :

- aux différentes commandes avec la touche PRGM puis dans les menus CTL ou E/S ;

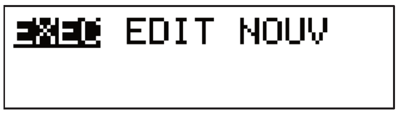


- aux symboles $>$, $<$, $=$ $\leqslant$, $\geqslant$ dans le menu tests, obtenu avec les touches 2nde puis MATH.



Lancer un programme

Sélectionner le sous-menu EXEC pour exécuter un programme.



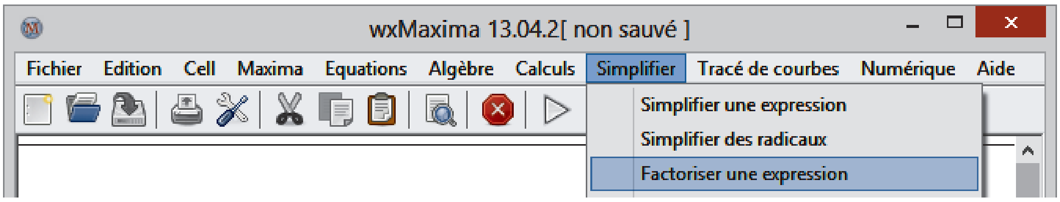
Modifier un programme

Sélectionner le sous-menu EDIT pour modifier un programme déjà existant.

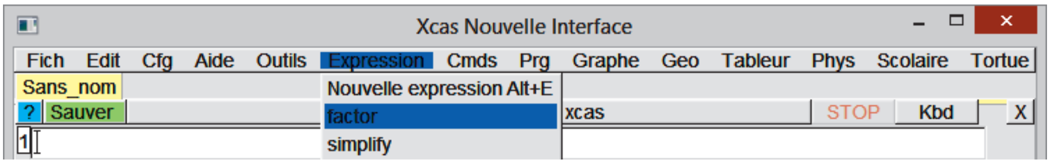
Fiche 4 Utiliser un logiciel de calcul formel

1 Découvrir l'interface logicielle

Maxima, avec l'interface wxMaxima



Xcas



2 Effectuer un calcul, écrire une expression algébrique

Exemples :

Maxima

```
(%i1) 1+1/3;
(%o1) 4/3

(%i2) %, float;
(%o2) 1.333333333333333

(%i3) 2^6;
(%o3) 64

(%i4) sin(-%pi/3);
(%o4) -sqrt(3)/2

(%i5) sqrt(24);
(%o5) 2 sqrt(6)
```

Xcas

```
1 1+1/3
  4/3
2 evalf(1+1/3)
  1.33333333333
3 2^6
  64
4 sin(-pi/3)
  -(√3)/2
5 sqrt(24)
  2*(√6)
```

Remarques :

- Les symboles +, -, /, *, ^ sont utilisés pour toutes les opérations classiques.
- On utilise **sqrt** pour la racine carrée.
- On utilise **cos**, **sin** et **tan** pour les fonctions trigonométriques.
- Pour obtenir une valeur approchée, on utilise **float** sous Maxima et **evalf** sous Xcas.
- Sous Maxima, « % » désigne le dernier calcul effectué et π s'écrit « %pi ».

3 Transformer des expressions, résoudre des équations

Développer, factoriser, simplifier

Exemples :

Maxima

```
(%i1) (x+2)*(2*x-9), expand;
(%o1) 2 x^2 - 5 x - 18
(%i2) x^3-1, factor;
(%o2) (x - 1)(x^2 + x + 1)
(%i3) 1/(x-1)+1/x, ratsimp;
(%o3) (2 x - 1)/(x^2 - x)
(%i4) %, factor;
(%o4) (2 x - 1)/((x - 1) x)
```

Xcas

```
1 developper((x+2)*(2x-9))
  2*x^2-5*x-18
2 factoriser(x^3-1)
  (x-1)*(x^2+x+1)
3 simplifier(1/(x-1)+1/x)
  (2*x-1)/(x^2-x)
4 factoriser(1/(x-1)+1/x)
  (2*x-1)/(x*(x-1))
```

Résoudre des équations

Exemples :

Maxima

```
(%i1) solve(x^2+5*x-3);
(%o1) [x = -(sqrt(37)+5)/2, x = (sqrt(37)-5)/2]
(%i2) linsolve([y=2*x-2, y=5*x+5], [x,y]);
(%o2) [x = -7/3, y = -20/3]
```

Xcas

```
1 resoudre(x^2+5x-3=0)
  [(-(sqrt(37))-5)/2, (sqrt(37)-5)/2]
2 linsolve([y=2x-2,y=5x+5],[x,y])
  [-7/3, -20/3]
```

Remarques :

- Si l'on ne précise pas le membre de droite d'une l'équation, celui-ci est supposé nul.
- On doit indiquer le nom des inconnues lorsqu'il y en a plusieurs ou bien ambiguïté.

4 Travailler avec des fonctions et des suites

Travailler avec des fonctions

Exemples :

Maxima

```
(%i1) f(x):=-x^4+x^2;
(%o1) f(x):= - x^4 + x^2
(%i2) f(1/2);
(%o2) 3/16
(%i3) subst(1/2,x,f(x));
(%o3) 3/16
(%i4) diff(f(x),x,1);
(%o4) 2 x - 4 x^3
(%i5) %, factor;
(%o5) - 2 x (2 x^2 - 1)
(%i6) diff(f(x),x,2);
(%o6) 2 - 12 x^2
```

Xcas

```
1 f(x):=-x^4+x^2
  x -> -x^4+x^2
2 f(1/2)
  3/16
3 substituer(f(x),x=1/2)
  3/16
4 deriver(f(x),x,1)
  (-4)*x^3+2*x
5 factoriser(deriver(f(x),x,1))
  (-2)*x*(x+sqrt(2)/2)*(2*x-(sqrt(2)))
6 deriver(f(x),x,2)
  (-12)*x^2+2
```

Remarque :

Lors d'un calcul de dérivée, le premier argument est la fonction à dériver, le deuxième est la variable par rapport à laquelle on dérive et le troisième représente le nombre de fois que l'on dérive.

■ Déterminer, si elle existe, la formule explicite d'une suite définie par récurrence

Exemple :

On considère la suite (u_n), définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$. On souhaite déterminer, si elle existe, l'expression de u_n en fonction de n.

Maxima

```
(%i1) load(solve_rec);... (0 Lignes cachées)
(%i2) solve_rec(u(n+1)=u(n)/(u(n)+1),u(n),u(0)=1);
```

(%o2) $u(n)=\dfrac{n+2}{n+1}-1$

```
(%i3) %, ratsimp;
```

(%o3) $u(n)=\dfrac{1}{n+1}$

Xcas

```
1 rsolve(u(n+1)=u(n)/(u(n)+1),u(n),u(0)=1)
```

$\dfrac{1}{n+1}$

Remarque :

Avec Maxima, on doit charger le package « solve_rec ».

■ Calculer une somme de termes d'une suite

Exemple :

On souhaite calculer la somme des 2 016, et plus généralement, des n premiers nombres impairs.

Un nombre impair s'écrit $2k + 1$. Le premier est pour $k = 0$ donc le 2 016ᵉ est pour $k = 2\,015$.

Maxima

```
(%i1) sum(2*k+1, k, 0, 2015), simpsum;
(%o1) 4064256
(%i2) sum(2*k+1, k, 0, n-1), simpsum;
```

(%o2) $2\,n+(n-1)^2-1$

```
(%i3) %, factor;
```

(%o3) n^2

Xcas

```
1 sum(2k+1,k,0,2015)
```

4064256

```
2 sum(2k+1,k,0,n-1)
```

n^2-n+n

```
3 simplifier(sum(2k+1,k,0,n-1))
```

n^2

```
4
```

Xcas et **Maxima** sont des logiciels libres. On peut les télécharger gratuitement aux adresses :
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`
`http://maxima.sourceforge.net/`
Il existe des versions en ligne, ne nécessitant pas d'installation, aux adresses :
`http://www.xcasenligne.fr/giac_online/demoGiacPhp.php`
`http://maxima-online.org/index.html`

SOLUTIONS

Chapitre A1
Second degré

Auto-évaluation

1 **1) a)** $f(-0,5) = -1$

b) $-0,5$, $2,5$ et 3.

2)

x	-1		1		$2,75$		4
f	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

3) Solutions : 0, 2 et 3,5.

4)

x	-1		0		2		$3,5$		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2 **1)** $x^2 - 4x + 4$

2) $-18x^2 + 60x - 50$

3) $6x^2 + 21x - 12$

4) $x^3y + xy^3$

3 **1)**

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3-4x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2)

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3)

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3+2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4) $(x+4)^2 \geq 0$, quelque soit $x \in \mathbb{R}$

4 **1)** Oui.

2) $(3\,;\,4)$ **a)** Oui.

b) Non, car $f(3) = 4$.

5 Les expressions **1), 2)** et **4)** sont égales.

6 **1)** $S = \varnothing$ **2)** $S = \{-3\,;\,\frac{1}{2}\}$

6 **1) 2) 3)**

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$		$-$		$+$	

$S =]-\infty\,;\,1[\cup]2\,;\,+\infty[$

7 **1)** Non **4)** Oui

2) Non **5)** Oui

3) Oui **6)** Non

8 **1)** 2 solutions car a et c sont de signe contraires.

2) Aucune solution.

3) 2 solutions.

4) 1 solution.

S'entraîner

1 **1)** Oui, avec $a = 2$, $b = 0$ et $c = 3$.

2) Oui, avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = 0$.

3) Oui, avec $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{3}$ et $c = \frac{2}{3}$.

4) Oui, avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = \frac{1}{2}$.

2 **1)** Non, c'est une droite.

2) Oui c'est une parabole.

3) Non, c'est une hyperbole.

4) Non, c'est la réunion de la droite $y = x$ et de la droite $y = -x$.

3 **1)** $(x-3)^2$

2) $(x+2)^2 - 4$

3) $(x+1)^2 - 1$

4) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

4 **1)** Oui, $a = 1$, $\alpha = 0$ et $\beta = 3$.

2) Non.

3) Oui, $a = -1$, $\alpha = -\sqrt{5}$ et $\beta = 0$.

4) Non.

5 **1)** Non

2) Oui, $S(2\,;\,1)$

3) Oui, $S(0\,;\,-2)$

4) Non

12 **1)** $(x+2)^2 - 3$

2) $4x^2 - 3$ est sous forme canonique.

3) $-2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{78}{16}$

4) $(x+3)^2 - 9$

17 **1)** $S(-2\,;\,3)$:

$f(x) = a(x - (-2))^2 + 3$.

2) $f(0) = 1$ donc

$a \times (0+2)^2 + 3 = 1$

c'est-à-dire $4a + 3 = 1$ soit $a = -\frac{1}{2}$.

19 $f(3) = f(-1) = 2$ car le point d'abscisse 3 de la parabole est le symétrique du point d'abscisse -1 de la parabole par rapport à l'axe de symétrie de la parabole d'équation $x = 1$.

21 1) $a > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	10	↗	

2) $a < 0$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
f		↗	2	↘	

3) $a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	-5	↗	

4) $a < 0$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f		↗	-5	↘	

30 1) Pas de solution car $\Delta = -3 < 0$.

2) Deux solutions car $\Delta = 9 > 0$.

3) Deux solutions car $\Delta = 19 > 0$.

4) Pas de solution car $\Delta = 1 - 2 \times \sqrt{2} < 0$.

48 Soit x le nombre d'invités.
On a $3x\,(x-1) = 468$ soit $3x^2 - 3x - 468 = 0$.
On obtient $x = 13$.

51 1) $S =]-\infty\,;\,-2[\, \cup\,]1\,;\,+\infty[$

2) $S = \mathbb{R}$

3) $S = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[\cup\,]0\,;\,+\infty[$

4) $S =]-2\,;\,2[$

Auto-évaluation QCM

66 d **67** b
68 c **69** c
70 a **71** c
72 c **73** b
74 a et b **75** b
76 c **77** c
78 b

Chapitre A2
Fonctions de référence

Auto-évaluation

1 1) vrai
2) on ne peut pas dire
3) vrai
4) faux
5) faux
6) faux

2 1) f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

3) h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) l est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

3 1) $1{,}15^2 < 1{,}3^2$

2) $(-2{,}05)^2 > (-1{,}99)^2$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} > \dfrac{1}{\sqrt{2}+3}$

4) $-\dfrac{1}{0{,}8} > -\dfrac{1}{0{,}7}$

4 1) $x = -\dfrac{1}{2}$
2) $x = \dfrac{4}{3}$
3) $x = -15$

5 1) $\dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$

2) $-2 < \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{4}$

3) $10^{-4} \leq \dfrac{1}{x} \leq 10^{-2}$

4) $-100 < \dfrac{1}{x} < -1$

6 1) $S =]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$

2) $S = [-2\,;\,2]$

3) $S = \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$

4) $S =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,2]$

7 1) $x \in [-2\,;\,2]$

2) $x \in]-\infty\,;\,-3[\,\cup\,]3\,;\,+\infty[$

S'entraîner

1 1) 7
2) 10
3) $\dfrac{2}{5}$
4) 10^4
5) 2×10^{-3}

2 1) 9
2) 0
3) 5
4) pas d'antécédent
5) 10^{-4}.

3 1) 8
2) 0
3) 4
4) $2\pi - 6$
5) $\sqrt{2} - 1$

4 1) 4
2) 9
3) $3 - \sqrt{5}$
4) $\pi - 1$
5) $2 - \sqrt{2}$
6) 1

5 1) $S = \{-5\,;\,5\}$

2) $S = \left\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right\}$

3) $S = \varnothing$

6 Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 3$.

1) $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} > \dfrac{1}{\sqrt{b}}$

3) $|a| < |b|$

4) $a^2 < b^2$

5) $\dfrac{1}{a^2} > \dfrac{1}{b^2}$

6) $\dfrac{-4}{a^2} < \dfrac{-4}{b^2}$

7) $\sqrt{a} - 1 < \sqrt{b} - 1$

8) $|a-3| > |b-3|$

9) $|3-a| > |3-b|$

10) $-2\,|a| > -2\,|b|$

7 **1)** croissante sur I
2) croissante sur I
3) décroissante sur I
4) décroissante sur I
5) est décroissante sur I
6) croissante sur I

8 **1)** croissante sur I
2) décroissante sur I
3) décroissante sur I

9 **1)** $0,3^2 < 0,3 < \sqrt{0,3}$
2) $\sqrt{1,2} < 1,2 < 1,2^2$

10 **1)** $0 < \sqrt{x} < 2$
2) $0 \leq \sqrt{x} \leq 0,2$
3) $1 \leq \sqrt{x} < 3 \times 10^3$

13 **1)** $S = \{16\}$ **3)** $S = \{-3\}$
2) $S = \varnothing$ **4)** $S = \{43\}$

14 **1)** $S =]9; +\infty[$
2) $S = \left[0; 10^4\right]$
3) $S = \varnothing$.

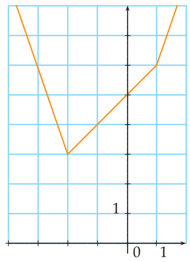
17 **1)** $x \in]0\,;\,1[$ donc
$x^2 < w < \sqrt{x}$
2) $y > 1$ donc $\sqrt{y} < y < y^2$

23 **1)** $10^{-3} - 10^{-5}$
2) 10^4
3) 10^{-3}
4) $4 - \pi$
5) $2 + \sqrt{2}$
6) $10 - 3\pi$

30 **1)**

x	$-\infty$ -2	-2 1	1 $+\infty$
$\|x-1\|$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$2\|x+2\|$	$-2x-4$	$2x+4$	$2x+4$
$f(x)$	$-3x-3$	$x+5$	$3x+3$

2)



39 **1)** $f(x)$ existe $\Leftrightarrow 2x - 18 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9$
2) La fonction $x \mapsto 2x - 18$ est croissante sur $[9\,;\,+\infty[$ donc f est croissante sur $[9\,;\,+\infty[$.

42 u, $-u$, $u+2$ et $-\dfrac{1}{4}u$ ont pour représentations graphiques respectives C_2, C_1, C_4 et C_3.

43 $\sqrt{u} = h$, $8 \times \dfrac{1}{u}$, $-\dfrac{1}{2}u = f$ et $u - 6 = g$.

51 **1)**

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$u(x)$	$\searrow$	0 $\searrow$		$\nearrow$ 0	$\nearrow$

2) $\dfrac{1}{u}$ est strictement croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$.

Auto-évaluation QCM

79 (c) **80** (b)
81 (a) (c) **82** (b)
83 (c) **84** (a) (b)
85 (b) **86** (b) (c)
87 (c) **88** (b) (d)
89 (d) **90** (a)
91 (a) (c) **92** (a)
93 (a) (c) **94** (b)

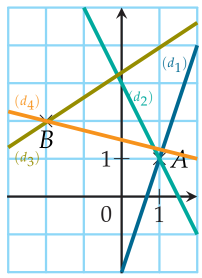
Chapitre A3
Dérivation

Auto-évaluation

1
- $(AB) : y = 3x + 5$
- $(AC) : y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{5}{3}$
- $(CD) : y = -2x + 5$
- $(BD) : y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$
- $(DE) : x = 2$
- $(AE) : y = -1$

2 **1)** $(AB) : y = 2x + 1$
2) $(CD) : y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{8}{5}$
3) $(EF) : y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$
4) $(GH) : y = -\dfrac{1}{2}x + 3$

3



4 **1)** **a)** $f(2) = 5$ donc oui.
b) $f(-1) = -4 \neq -10$ donc non.
2) **a)** $-1 \notin [4,5\,;\,+\infty[$ donc non.
b) $f(5) = 1$ donc oui.

5 **1) a)** $f(1+x)=x^2+5x+4$

b) $f(1-x)=x^2-5x+4$

c) $1-f(x)=-x^2-3x+1$

d) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3x+1}{x^2}$

2) a) $f(1+x)=\dfrac{2x+5}{x-6}$

b) $f(1-x)=\dfrac{2x-5}{x+6}$

c) $1-f(x)=-\dfrac{x+10}{x-7}$

d) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{3x+2}{7x-1}$

S'entraîner

1 $y=3x-1$

2 $f'(a)=3a^2+75$

3 **1)** $f'(4)=-\dfrac{1}{4^2}=-\dfrac{1}{16}$

2) $f'(-2)=2\times(-2)=-4$

3) $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=1$

4) $f'(-1)=3\times(-1)^2=3$

4 **1)** $f(0)=0$ et $f'(0)=-3$.

2) En $a=-1$ ou $a=1$.

3) sur $[-1\,;\,1]$.

4) sur $[-2\,;\,-1]\cup[1\,;\,2]$.

5 **1)** $f'(-1)=-3$.

2) $f'(-1)=0$.

3) $f'(-1)=\dfrac{2}{3}$.

6 **1)** $f'(x)=4x$

2) $g'(x)=4x^3+6x^2$

3) $h'(x)=-\dfrac{3}{x^5}$

4) $i'(x)=-2\dfrac{x+1}{x^4}$

10 **1)** $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(3)=2 \underset{h\to 0}{\to} 2$ donc f est dérivable en 3 et $f'(3)=2$.

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(a)=m \underset{h\to 0}{\to} m$ donc f est dérivable en a et $f'(a)=m$.

3) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(2)=-3h-12 \underset{h\to 0}{\to} -12$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=-12$.

4) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(1)=\dfrac{2}{h+1} \underset{h\to 0}{\to} 2$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=2$.

5) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(1)=\dfrac{1}{\sqrt{h}} \underset{h\to 0}{\to} +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 1.

12 **1)** $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(-1)=3-h \underset{h\to 0}{\to} 3$ donc f est dérivable en -1 et $f'(-1)=3$. T a pour équation $y=3x+2$.

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(4)=\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h+4}+2} \underset{h\to 0}{\to} \dfrac{1}{4}$ donc f est dérivable en 4 et $f'(4)=\dfrac{1}{4}$.

T a pour équation $y=\dfrac{1}{4}x+1$.

3) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{h}} \underset{h\to 0}{\to} +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0. f admet tout de même une tangente en 0 mais verticale, d'équation $x=0$.

4) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(-2)=\dfrac{1}{2h-4} \underset{h\to 0}{\to} -\dfrac{1}{4}$ donc f est dérivable en -2 et $f'(-2)=-\dfrac{1}{4}$.

T a pour équation $y=-\dfrac{1}{4}x-1$.

14 **1) a)** $f(-3)=3$ et $f'(-3)=-1$

b) $f(-1)=-2$ et $f'(-1)=2$

c) $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=4$ et $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=0$

2) f n'est pas dérivable en $a=1$ car la courbe présente un point anguleux.

29

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x)=1\,000x^{999}-4$

2) f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

$f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$

3) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

4) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Auto-évaluation QCM

65 c	**66** b
67 a	**68** b c
69 a d	**70** b
71 b	**72** d
73 a	**74** c
75 b c	**76** c
77 b c	**78** b
79 c	**80** c
81 a	

Chapitre A4

Applications de la dérivation

Auto-évaluation

1

1)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2)

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

3)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$h(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

4)

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$i(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

2 **1)** $f'(x) = 4x^3 - 18x^2$

2) $g'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

3) $h'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+5)^2}$

4) $i'(x) = -\dfrac{11}{(2x+5)^2}$

3

1) Le maximum de f vaut 5, atteint en $x = -1$. Le minimum de f vaut 1, atteint en $x = -3$.

2) Le maximum de f vaut 5, atteint en $x = -1$. Pas de minimum.

4

1)

x	-2		-1		0		2		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2)

x	-2		$-\frac{1}{2}$		1		3
f	-2	$\nearrow$	$0{,}25$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

S'entraîner

1 **1)** f est croissante sur $[-1\,;\,2]$ et décroissante sinon.

2) f admet un minimum local en -1 et un maximum local en 2.

2 f est croissante sur $-]\infty\,;\,1]$ et aussi sur $[2\,;\,+\infty[$ et décroissante sinon.

3 $f'(x) = 3x(x-2)$ donc f est croissante sur $-]\infty\,;\,0]$ et aussi sur $[2\,;\,+\infty[$ et décroissante sinon.

4 $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,3[$ et aussi sur $]4\,;\,+\infty$ et positive sinon.

5 **1) a)** $]-2\,;\,-1{,}5[\cup]2{,}5\,;\,3[$;

b) $]-1{,}5\,;\,0[\cup]0\,;\,2{,}5[$;

c) $]-1\,;\,0[\cup]1\,;\,3[$;

d) $]-2\,;\,-1[\cup]0\,;\,2[$.

2) a) $\mathscr{S} = \{-1{,}5\,;\,0\,;\,2{,}5\}$;

b) $\mathscr{S} = \{-1\,;\,0\,;\,1\}$.

6 **1)** f admet un extremum en 2 car $f'(x)$ s'y annule en changeant de signe.

2) Il s'agit d'un minimum car f est décroissante puis croissante.

7 **1) a)** $]-1\,;\,1[$;

b) $]-\frac{3}{2}\,;\,-1[$.

2) a) Faux car $f'(x)$ est négative puis positive.

b) Vrai (même justification).

c) Faux car $f'(x)$ ne change pas de signe.

d) Faux (même justification).

8 $\mathcal{C}_1$ représente f' et $\mathcal{C}_2$ représente f.

20

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	

40 f admet un maximum en 1 donc f' s'annule et change de signe en 1, ce qui élimine $\mathcal{C}_3$. f est strictement croissante sur $]0\,;\,1[$ donc $f'(x) > 0$ sur ce même intervalle : seule $\mathcal{C}_2$ correspond.

Auto-évaluation QCM

67	b	**68**	b c
69	a e	**70**	a
71	c	**72**	a b c
73	a	**74**	a c
75	a d	**76**	b
77	d	**78**	b c
79	b	**80**	c
81	b	**82**	b
83	c	**84**	c
85	b	**86**	a
87	a c	**88**	a
89	c	**90**	b

Chapitre A5

Notion de suite

Auto-évaluation

1 **1)** En B2 on obtient $\dfrac{4}{3}$ et en E2, on obtient $\dfrac{1}{6}$.

2) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x+3}$

3) De 0 à 20, il y a 21 valeurs à calculer.

2 **1)** $25 \times 5^6 = 5^2 \times 5^6 = 5^8$

2) $(4^n)^3 = 4^{3n}$

3) $2^n \times 2 = 2^n \times 2^1 = 2^{n+1}$

4) $\dfrac{1}{3} \times 3^n = \dfrac{3^n}{3^1} = 3^{n-1}$

3 **1)** $4\,000 \times 1,15 = 4\,600$ spectateurs en 2013 et $4\,600 \times 1,1 = 5\,060$ spectateurs en 2014.
2) $4\,000 \times 0,95 = 3\,800$ spectateurs en 2013 et $3\,800 \times 0,95 = 3\,610$ spectateurs en 2014.

4 $f(n+1) = 2n^2 + n$

S'entraîner

1 $u_4 = \dfrac{9}{5}$

2 $u_1 = 0; u_2 = 1; u_3 = \sqrt{2}$

3 $u_3 = 6$

4 $u_1 = 2\,;\, u_2 = 0$

5 $u_1 = \dfrac{4}{3}\,;\, u_2 = \dfrac{7}{4}\,;\, u_3 = \dfrac{11}{7}$

6 **1)** $u_1 = 2\,;\, u_2 = 4$
2) $u_n = n \times u_{n-1}$

7 $u_1 = 1\,;\, u_2 = 3\,;\, u_3 = 6\,;$ $u_4 = 10$

8 $u_1 = 1,5\,;\, u_2 = 1,75\,;$ $u_3 = 1,875\,;\, u_4 = 1,9375$

9 **1)** 14 **3)** 0
2) $\dfrac{7}{6}$ **4)** 3

10 **1)** $\sum\limits_{k=3}^{9} k$ **2)** $\sum\limits_{k=0}^{4} \dfrac{1}{2^k}$

11 $u_4 = 7,9$

12 $u_3 = 4,2$

13 $u_6 = 40$

14 $u_3 = -54$

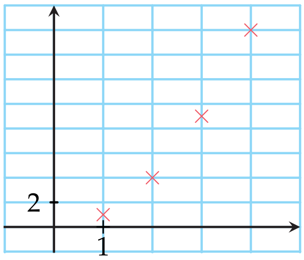
15 **1)** $u_1 = 2 \quad u_2 = 1,75 \quad u_3 = \dfrac{7}{6}$
2) $u_1 = 1 \quad u_2 = \dfrac{1}{2} \quad u_3 = \dfrac{1}{4}$
3) $u_1 = 4 \quad u_2 = 8 \quad u_3 = 16$

16 **1)** $u_0 = 0 \quad u_1 = -3 \quad u_2 = -2$
2) $u_0 = 1 \quad u_1 = -4 \quad u_2 = 12$
3) $u_0 = 1 \quad u_1 = 3 \quad u_2 = 8$

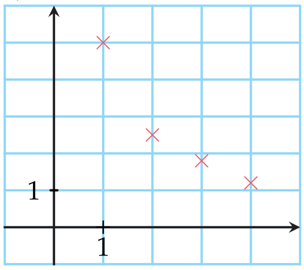
17 **1)** **a)** $u_1 = 2 \quad u_2 = 4 \quad u_3 = 5$
b) $u_1 = 3 \quad u_2 = 6 \quad u_3 = 15$
c) $u_1 = -4 \quad u_2 = 8$ $u_3 = -16$
2) **a)** $u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + 3$
b) $u_n = -2u_{n-1}$
c) $u_n = (n-1)u_{n-1} + 3$

19 **1)** Formule explicite $u_0 = 0$
$u_1 = 1 \quad u_2 = 4 \; u_3 = 9$
2) Formule par récurrence
$u_0 = -5 \quad u_1 = -6 \quad u_2 = -8$
$u_3 = -12$
3) Formule explicite $w_1 = 1$
$w_2 = \dfrac{3}{2} \quad w_3 = \dfrac{11}{6} \quad w_4 = \dfrac{25}{12}$

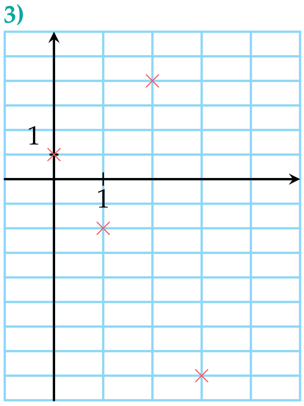
35 **1)**



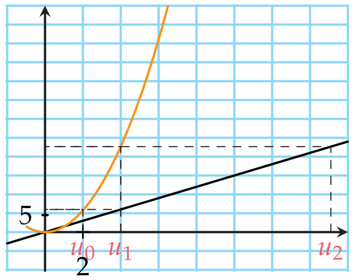
2)



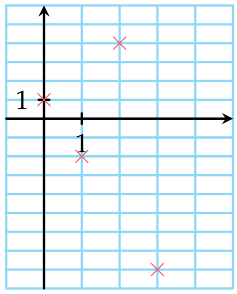
3)



38 **1)**



2)



41 **1)** (u_n) est arithmétique car $u_{n+1} - u_n = 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Raison 4 et premier terme $u_0 = 7$.
2) et **4)** (u_n) n'est pas arithmétique car $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$
3) (u_n) est arithmétique car $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Raison $\dfrac{1}{2}$ et premier terme $u_0 = 5$.

43 **1)** **2)** et **3)** (u_n) n'est pas arithmétique car $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.
4) (u_n) est arithmétique car $u_{n+1} - u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (raison 1).

44 **1)** $u_n = -3 + \dfrac{n}{2}$
2) $u_n = 20 - 2n$
3) $u_n = \dfrac{11}{2} - 6n$
4) $u_n = 4 + \dfrac{n-4}{5}$

51 **1)** (u_n) géométrique car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (raison 3 et $u_0 = -4$).

2) (u_n) géométrique car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (raison 1 et $u_0 = 3$).

3) (u_n) géométrique car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (raison $\frac{3}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$).

4) (u_n) géométrique car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (raison 8 et $u_0 = 64$).

53 **1)** (u_n) est géométrique car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (raison $\frac{3}{4}$).

2) et **3)** $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

54 **1)** $u_n = -\frac{1}{2} \times (-3)^n$

2) $u_n = -3 \times (0,02)^n$

3) $u_n = -1\,000 \times (-\frac{1}{10})^{n-1}$

4) $u_n = 7 \times (9)^{n-4}$

Auto-évaluation QCM

78 b d
79 c
80 b
81 b
82 c
83 b
84 b
85 b
86 c d
87 a
88 a

Chapitre A6
Comportement global d'une suite

Auto-évaluation

1 **1)** A est positive pour $x \leq \frac{4}{3}$ et négative pour $x \geq \frac{4}{3}$.

2) B est positive sur i.

3) C est négative sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup [3\,;\,+\infty[$ et positive sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,3\right]$.

4) D est négative sur $[0\,;\,1]$ et positive sur $]-\infty\,;\,0] \cup [1\,;\,+\infty[$

5) E est négative sur $]-\infty\,;\,-1] \cup [0\,;\,1]$ et positive sur $[-1\,;\,0] \cup [1\,;\,+\infty[$.

2 **1)** f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

2) f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

3) f est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,+\infty\right[$.

3 **1)** u n'est ni géométrique ni arithmétique

2) u est arithmétique de raison 3 et de premier terme -5

3) u n'est ni géométrique ni arithmétique

4) u n'est ni géométrique ni arithmétique

4 **1)** $u_{n+1} = -4n - 2$

2) $u_{n+1} = 3^n \times 15$

3) $u_{n+1} = 2n^2 + 4n - 1$

4) $u_{n+1} = \frac{n+2}{3n+4}$

S'entraîner

1 u est décroissante.

2 u est croissante.

3 u est décroissante.

4 u est décroissante.

5 u n'est pas monotone.

6 **1)** u n'est pas monotone.

2) u est croissante.

7 **1)** La suite semble convergente vers 2.

2) La suite semble divergente vers $+\infty$.

8 **1)** $= 2/A1 + 4$

2) La suite semble convergente vers 4.

9 **1)** $= -2 * A1\hat{}2 + 12$

2) La suite semble divergente vers $-\infty$.

10 **1)** u est décroissante.

2) u est croissante.

3) u est décroissante.

12 **1)** v est croissante.

2) v est croissante.

3) v est décroissante.

14 **1)** u est croissante.

2) u est croissante

3) u est croissante.

4) u est décroissante.

16 **1)** $u_0 = -1\,;\,u_1 = 0\,;\,u_2 = 3$ mais $u_3 = 0$

2) $u_0 = 1\,;\,u_1 = 0\,;\,u_2 = 1$

3) $u_0 = 1\,;\,u_1 = -\frac{1}{2}\,;\,u_2 = \frac{1}{4}$

34 1) La suite n'est pas monotone. Elle converge vers 0.
2) La suite n'est pas monotone et décroissante à partir du terme d'indice 3 et diverge vers $+\infty$.

38 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Auto-évaluation QCM

65 a **66** a
67 b **68** a
69 b **70** b
71 c **72** a
73 a **74** d
75 c **76** c
77 d **78** c
79 a et C

Chapitre G1
Vecteurs et droites du plan

Auto-évaluation

1 1) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$
2) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

2 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$
2) $-3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-21\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}-2\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$
3) $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

3 1) $\overrightarrow{FC}$ 3) $\overrightarrow{AL}$
2) $\overrightarrow{CH}$ 4) $\overrightarrow{FA}$

4 1) $\vec{0}$
2) $2\overrightarrow{AD}$

S'entraîner

1 1) Oui 3) Non
2) Oui

2 $2x+y-1=0$

3 $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

4 1) $y=x+2$
2) $y=-3x+\frac{1}{2}$

5 1) $-2\times(-1)+3\times 2-4=2+6-4=4\neq 0$ donc $A\notin d$.
2) Pour $y=0$, $x=-2$ donc le point $A(-2\,;\,0)$.

6 $\overrightarrow{AB}=3\vec{u}+2\vec{v}$
$\overrightarrow{AC}=-2\vec{u}$
$\overrightarrow{BC}=-5\vec{u}-2\vec{v}$

8 1) (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
2) (AB) et (CD) sont parallèles.
3) (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
4) (AB) et (CD) sont parallèles.
5) (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

10 1) A, B et C ne sont pas alignés.
2) A, B et C sont alignés.
3) A, B et C ne sont pas alignés.

27 1) $M\in d_1 \Leftrightarrow 3x+2y-10=0$.
2) $M\in d_2 \Leftrightarrow 5x-y=0$.
3) $M\in d_3 \Leftrightarrow -\frac{x}{2}-\frac{y}{3}-\frac{1}{3}=0$.
4) $M\in d_4 \Leftrightarrow 2x-2=0$

28 1) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.
$A(0\,;\,3)$ est un point de d.
2) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-25\\12\end{pmatrix}$.
$A\left(0\,;\,\frac{7}{25}\right)$ est un point de d.
3) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$.
$A(0\,;\,-8)$ est un point de d.
4) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.
$A\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ est un point de d.
5) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
$A(0\,;\,-5)$ est un point de d.
6) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.
$A(0\,;\,1)$ est un point de d.

Auto-évaluation QCM

75 a et d **76** b et d
77 c **78** c
79 a **80** a
81 b et d **82** c
83 a **84** b
85 c **86** a

Chapitre G2

Angles orientés et trigonométrie

Auto-évaluation

1 L'arc $\widehat{IJ}$ mesure π radians.
L'angle mesure 180 degrés.

$\widehat{IOM}$ (deg)	60	≈ 57
$\widehat{IOM}$ (rad)	$\frac{\pi}{3}$	1

90	150	180
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

2 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{5} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$
$< \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{4} < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$

3 $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{OH}{OA} = OH = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{OA} = AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

S'entraîner

1

x (rad)	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$
x (deg)	36	60	72

$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
144	180	240

2

x (deg)	30	45	75
x (rad)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$

90	135	150
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

3 **1)** Faux **3)** Vrai
2) Vrai **4)** Faux

4 **1)** Les mesures principales de 15π, -3π, -6π, 28π et $-\pi$ sont respectivement π, π, 0, 0 et π.

2) Les mesures principales de $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{2}$ et $\frac{26\pi}{2}$ sont respectivement $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 et π.

5 **1)** $(\vec{v}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{4}$
2) $(\vec{u}, -\vec{v}) = -\frac{3\pi}{4}$
3) $(-\vec{u}, -\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$
4) $(\vec{v}, -\vec{u}) = \frac{3\pi}{4}$

6 **1)** $\frac{2\pi}{3}$
2) $-\frac{2\pi}{3}$
3) $\frac{5\pi}{3}$
4) $\frac{\pi}{3}$

7 **1)** $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$
2) $(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{t}) = (\vec{v}, \vec{t})$
3) $(\vec{t}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{t}) = (\vec{v}, \vec{w})$

8 **1)** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$
2) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$
3) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$

9

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$
0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

10 **1)** $A : -\frac{\pi}{4}$ $B : -\frac{5\pi}{6}$ $C : \frac{5\pi}{6}$
$D : -\frac{\pi}{18}$ $E : \frac{2\pi}{3}$ $F : -\frac{6\pi}{10}$ $G : \frac{\pi}{6}$
$H : \frac{9\pi}{10}$

2) $\frac{2\pi}{3}, \frac{35\pi}{36}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{14\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}$

16 **1)** $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ **3)** $\left[-\pi\,;\,-\frac{2\pi}{3}\right]$
2) $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ **4)** $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$

20 **1)** $\frac{3\pi}{5}$ car $-\frac{7\pi}{5} \notin\,]-\pi\,;\,\pi]$ mais $-\frac{7\pi}{5} + 2\pi = \frac{3\pi}{5} \in\,]-\pi\,;\,\pi]$

2) $\frac{\pi}{2}$ car $\frac{18\pi}{4} \notin\,]-\pi\,;\,\pi]$ mais $\frac{18\pi}{4} - 4\pi = \frac{\pi}{2} \in\,]-\pi\,;\,\pi]$

3) $-\frac{2\pi}{3}$ car $\frac{4\pi}{3} \notin\,]-\pi\,;\,\pi]$ mais $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \in\,]-\pi\,;\,\pi]$

4) $\frac{7\pi}{10}$ car $\frac{7\pi}{10} \in\,]-\pi\,;\,\pi]$

32 $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

38 **1)** $-2\cos x$

2) $= 2\cos x$

3) $= -2\sin x$

4) $= 2\sin x$

41 **1)** $\sin\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

45 **1)** $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -\dfrac{7}{8}$

2) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1}{3}$

49 **1)** $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc on résout $\cos x = \cos\dfrac{3\pi}{4}$, ce qui est équivalent à $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ pour $x \in]-\pi\,;\,\pi]$.

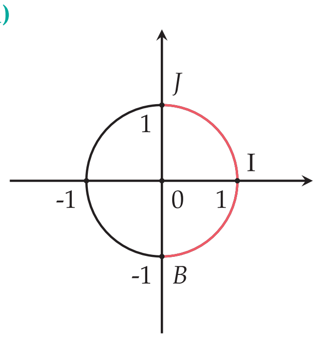
2) $S = \left\{\dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi\right\}$; $\left\{-\dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in Z\right\}$

50 **1)** **a)** $\sin x = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{\pi}{6}$

2) Dans $]-\pi\,;\,\pi]$, $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right\}$ et dans $\mathbb{R}$, $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi\right\}$; $\left\{\dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in Z\right\}$.

54 **1)**



2) $S = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Auto-évaluation QCM

67 c et d — **68** a
69 c — **70** a et c
71 b — **72** d
73 a — **74** b et c
75 b et d — **76** d
77 a — **78** b
79 b — **80** b et d
81 a — **82** a
83 b — **84** b
85 b et d — **86** d
87 d — **88** b
89 b et d — **90** c
91 c — **92** a

Chapitre G3

Produit scalaire dans le plan

Auto-évaluation

1 **1)** Vrai : $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$.

2) Faux : $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$.

3) Faux : $\|-5\vec{u}\| = 5\,\|\vec{u}\|$.

2 $\vec{u} = -2\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC}$

$\vec{v} = 3\overrightarrow{RA} - 2\overrightarrow{RB} - \overrightarrow{RC}$.

3 **1)** Le repère $\left(A\,;\,\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$ convient.

2) Dans ce repère, $A(0\,;\,0)$, $B(2\,;\,0)$, $C(2\,;\,3)$ et $D(0\,;\,3)$.

4 **1)** **a)** $\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$

b) $-\dfrac{\pi}{4}(2\pi)$

c) $-\dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$

d) $\dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$

2) $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5 **1)** $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **3)** $\vec{u_3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

2) $\vec{u_2}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$

S'entraîner

1 **1)** $\dfrac{39}{2}$ **4)** -5

2) 45 **5)** -128

3) 30

2 • $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BL} = BC \times BJ$
• $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = -IB \times IA$
• $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$
• $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LK} = AB \times AI$

3 **1)** $\vec{n_1}\begin{pmatrix}65\\-12\end{pmatrix}$ **3)** $\vec{n_5}\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$

2) $\vec{n_3}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ **4)** $\vec{n_6}\begin{pmatrix}-9\\2\end{pmatrix}$

4 Oui car $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$ donc est normal à d et $2x_T - 8y_T + 28 =$
$2 \times 14 - 8 \times 7 + 28 = 0$
donc $T \in d$.

5 **1)** $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $A(2\,;\,5)$ et de rayon 3.
2) $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre $B(-3\,;\,7)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

6 **1)** (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.
2) (EF) et d_1 sont perpendiculaires.
3) d_2 et d_3 sont perpendiculaires.

13 **1)** Le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ convient.
Dans ce repère $A(0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0)$, $C(1\,;\,1)$, $D(0\,;\,1)$, $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$, $J\left(1\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ et $L\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
2)
a) 1 **c)** $\frac{1}{4}$
b) $-\frac{3}{4}$ **d)** $-\frac{1}{2}$

19 **1)** (AC) et (AB) ne sont pas perpendiculaires.
2) a) (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
b) (BE) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

44 **1) a)** $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT} = 8$, $\left\|\overrightarrow{RS}\right\| = 2\sqrt{10}$ $\left\|\overrightarrow{RT}\right\| = 4\sqrt{5}$
b) $\cos\left(\widehat{SRT}\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$
donc $\widehat{SRT} \approx 81{,}87^\circ$.
2) $\widehat{RST} \approx 60{,}26^\circ$
3) $\widehat{STR} \approx 37{,}87$

65 **1)** $x + 3y + 13 = 0$
2) $2y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 6$
3) $10x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
4) $-4x + 6y - 42 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 21 = 0$
5) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - (7\sqrt{2} + 8\sqrt{3}) = 0$

73 **1)** $(1-x)(4-x) + (2-y)(6-y) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 - 8y + 16 = 0$
2) $(4-x)(-3-x) + (6-y)(-8-y) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + 2y - 60 = 0$
3) $(1-x)(-3-x) + (2-y)(-8-y) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 6y - 19 = 0$

Auto-évaluation QCM

100 b
101 d
102 a
103 b
104 b
105 a c
106 d
107 a
108 a c
109 c d
110 a c
111 b
112 a d
113 d
114 c

Chapitre SP1
Statistiques

Auto-évaluation

1 **1)** La première ligne correspond aux valeurs et la deuxième aux effectifs.
2) 35
3) 5
4) $Q_1 = 3$ et $Q_3 = 5$
5) $\frac{152}{35}$

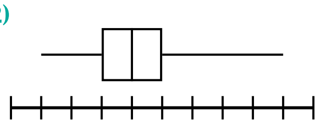
2 **1)** 256 ; 288 ; 320 ; 336 ; 352 et 512
2) 328
3) Non : la moyenne est 344.
4) N'importe quel multiple de 16 inférieur ou égal à 320.

3 **1)** 37
2) 271

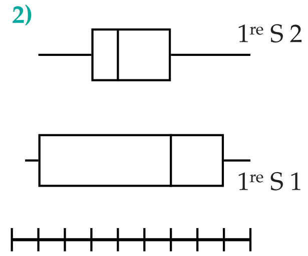
S'entraîner

1 L'intervalle interquartile est $[105\,;\,135]$ et l'écart interquartile est 30.
2 2 ; 9 ; 12 ; 24 ; 36.
3 $\sigma \simeq 194$
4 $\sigma \simeq 2{,}1$
5 La série 0 ; 0 ; 20 et 20 convient ($\sigma = 10$ et écart interquartile = 20).
6 La moyenne est 12, la variance est $\frac{26}{3}$ et $\sqrt{\frac{26}{3}} \approx 2{,}9$.
7 C'est la série 5 ; 12 ; 1 ; 13 ; 2 car ses valeurs semblent plus éloignées les unes des autres.
8 $x_1 + x_4 + x_5$
9 $n_{12} + n_{11} + n_{10} - n_6$
10 Les séries 9 ; 10 ; 11 et 5 ; 10 ; 15 conviennent (moyenne 10 et écart-type respectifs $\simeq 0{,}8$ et $\simeq 4{,}1$).

13 **1)** $Q_1 = 4$; médiane $= 5$;
$Q_3 = 6$.
2)



15 **1)** Il y a 35 élèves en 1re S1 et 31 en 1re S2.
2)



3) On remarque que la médiane de la 1re S1 est supérieure à celle de la 1re S2, on peut donc penser que c'est globalement une meilleure classe.
Cependant, l'écart interquartile de la 1re S1 est de $9 - 2 = 7$ contre $7 - 4 = 3$ pour la 1re S2 donc la 1re S2 est une classe plus homogène.

23 **1)** **a)** Le nombre de points marqués par Dabovic est 95 ;
b) le nombre de points marqués par Moore est 92.
2) La moyenne de points marqués par Dabovic est :
$\dfrac{95}{7} \approx 13,57$.
L'écart-type est à peu près égal à 7,5.
La moyenne de points marqués par Moore est :
$\dfrac{92}{6} \approx 15,33$.
L'écart-type est à peu près égal à 2,56.
3) La calculatrice donne les mêmes résultats.
4) Moore est la plus efficace car sa moyenne est supérieure et est également plus régulière car son écart-type est (très) inférieur.

24 **1)** Boujémaa mange en moyenne 4,6 fruits et légumes par jour.
L'écart-type est à peu près égal à 1,3.
2) La calculatrice donne les mêmes résultats.

30 **1)** Comme il postule pour un poste à salaire intermédiaire, il préférera les indicateurs qui tiennent moins compte des valeurs extrêmes (bas et hauts salaires) donc la médiane et l'écart interquartile.
2) On peut penser qu'un ou quelques gros salaires « tirent » la moyenne et l'écart-type vers le haut.

Auto-évaluation QCM

43 ⓐ **44** ⓒ
45 ⓐ **46** ⓓ
47 ⓓ **48** ⓐ
49 ⓑ **50** ⓒ
51 ⓒ **52** ⓑ
53 ⓓ **54** ⓐ

Chapitre SP2
Probabilités : variables aléatoires

Auto-évaluation

1 $P(A \cup B) = 0,6$

2 $P(A \cup B) =$
$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
donc $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - P(A \cap B)$
donc
$P(A \cap B) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$.

3 L'univers est $\Omega = \{\text{cartes}\}$.
Les issues sont équiprobables.
$P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$;
$P(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$;
$P(C) = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$.
$P(B \cap C) = 0$;
$P(\overline{B}) = \dfrac{3}{4}$;
$P(A \cup C) = \dfrac{9}{16}$.

4 Il y a 10 choix pour le premier chiffre, 9 choix pour le deuxième, 8 choix pour le troisième et 6 choix pour le quatrième.
$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$. Cela fait 120 codes possibles.

5 **1)** L'univers est $\Omega = \{\text{adhérents}\}$. Les issues sont équiprobables.
$P(D) = \dfrac{90}{250} = 0,36$
$P(Y) = \dfrac{60}{250} = 0,24$;
$P(D \cap Y) = \dfrac{35}{250} = 0,14$.
2) $P(D \cup Y) = 0,46$
$P(\overline{D \cup Y}) = 0,54$

6 **1)** Il y a 10 choix pour le premier chiffre, 10 choix pour le deuxième, 10 choix pour le troisième et il y a 26 choix pour la lettre.
$10 \times 10 \times 10 \times 26 = 26\,000$. Il y a 26 000 codes possibles.
2) a) Un visiteur qui a oublié la lettre du code doit essayer 26 codes possibles.
b) Soit A l'événement : « Le visiteur ouvre la porte du premier coup ». $P(A) = \frac{1}{26}$.

S'entraîner

1 **1)** $(X \leq 5)$
2) $(X < 2)$
3) $(X > 3)$
4) $(X > 4)$

2 **1)** « Au moins un élève de la classe ne sera pas admis au bac ».
2) « Il y a au moins un jour où Paul ne mange pas à la cantine ».
3) « Il m'arrive d'aller au cinéma le dimanche ».
4) « Au moins un élève de la classe ne possède pas de téléphone portable ».

3 $a = 0{,}25$

4 $P(X = 3) = 0{,}2$

$P(X \leq 3) = 0{,}7$

5 **1)** $0,6$ **3)** $0,4$
2) $0,4$ **4)** $0,6$

6 $E(X) = \frac{7}{6}$

7 $E(X) = 1,4$
Sur une longue période, le client peut espérer voir en moyenne 1,2 clients en 10 min, soit 8,2 clients par heure.

8 $E(X) = -\frac{1}{8}$
L'espérance est négative, donc le jeu est défavorable au joueur.

9 **1)** 10 **3)** 5
2) 0 **4)** 20

11 $P(B) = 0,6$
$P(A \cup B) = 0,1$.

23

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

28 **1)** $P(X \geq 500) = 0{,}63$
2) $P(X \geq 490) = 0{,}92$
La probabilité qu'un pain soit commercialisé est de 0,92.

31 **1)** $0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}05 = 1$.
Le tableau définit bien une loi de probabilité.
2) $P(X \geq 0) =$

$P(X = 0) + P(X = 1) +$

$P(X = 2) = 0{,}65 P(X < 1) =$

$P(X = -2) + P(X = -1) +$

$P(X = 0) = 0{,}75$

3) $E(X) = 0{,}15$

$V(X) = 1{,}0275$

$\sigma(X) = \sqrt{1{,}0275}$

51 **1)** $E(3X - 1) = 5$ et $V(3X - 1) = 9 \times 5 = 45$.
2) $E(-2X + 1) = -2E(X) + 1 = -3$ et $V(-2X + 1) = (-2)^2 V(X) = 20$.

Approfondir

60 **1) a)** Il y a 7 choix pour le deuxième et 6 choix pour le troisième.
b) $8 \times 7 \times 6 = 336$. Il y a 336 arrivées possibles pour les trois premiers chevaux.
2) Soit X le gain algébrique du joueur. X peut prendre les valeurs –10 ; 90 et 990.
Si on désigne par A-B-C le tiercé dans l'ordre, les tiercés dans le désordre sont A-C-B, B-A-C, B-C-A, C-A-B, C-B-A.
Ce qui fait 5 possibilités. D'où la loi de probabilité de X :

x_i	-10	90	990
p_i	$\frac{330}{336}$	$\frac{5}{336}$	$\frac{1}{336}$

3) $E(X) = -\frac{155}{28}$

Auto-évaluation QCM

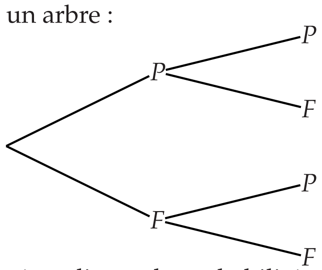
75 c
76 a
77 a
78 a c
79 a
80 b d
81 c d
82 a
83 c
84 c
85 b
86 d
87 c
88 b c
89 a b d

Chapitre SP3

Loi binomiale et intervalle de fluctuation

Auto-évaluation

1 On représente la situation par un arbre :



où on lit que la probabilité d'obtenir exactement une fois pile et une fois face est de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2 $E(X) = 0{,}2 \times (-6) + 0{,}3 \times (-1) + 0{,}5 \times 5 = 1$ et $V(X) = 0{,}2 \times (-6-1)^2 + 0{,}3 \times (-1-1)^2 + 0{,}5 \times (5-1)^2 = 19$.

3 **1)** Si p était égal à 0,1, alors les autres faces auraient pour probabilité $\frac{1-0{,}1}{5} = 0{,}18$ et $0{,}1 < 0{,}18$ donc p ne peut pas être égal à $0,1$.

2) a) On résout $p + 5 \times \frac{1}{7} = 1 \Leftrightarrow p = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$.

b) On résout $1\frac{1-p}{5} + 2\frac{1-p}{5} + 3\frac{1-p}{5} + 4\frac{1-p}{5} + 5\frac{1-p}{5} + 6p = 5{,}5 \Leftrightarrow \frac{15-15p}{5} + 6p = 5{,}5 \Leftrightarrow 3 + 3p = 5{,}5 \Leftrightarrow 3p = 2{,}5 \Leftrightarrow p = \frac{2{,}5}{3} = \frac{5}{6}$.

c) On résout $5 \times \frac{p}{3} + p = 1 \Leftrightarrow \frac{8p}{3} = 1 \Leftrightarrow p = \frac{3}{8}$.

4 D'après la formule vue en seconde, l'intervalle de confiance au seuil de 95 % est $\left[0{,}36 - \frac{1}{\sqrt{1600}}\ ;\ 0{,}36 + \frac{1}{\sqrt{1600}}\right] = [0{,}335\ ;\ 0{,}385]$ sous forme décimale soit, en pourcentage, [33,5 ; 38,5].

5 D'après la formule vue en seconde, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est [0,092 5 ; 0,112 5], arrondi à 10^{-3}.

S'entraîner

1 L'espérance est de $8 \times \frac{1}{4} + (-4) \times \frac{3}{4} = -1$ euro, donc il faut conseiller à Sara de ne pas jouer à ce jeu.

2 La probabilité est de $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}$.

3 Soit n le nombre de boules noires, on a alors $2n$ boules rouges et $6n$ boules noires soit $9n$ boules en tout.
La probabilité de tirer une boule rouge est donc $\frac{2n}{9n} = \frac{2}{9}$.

4 **1)** $\frac{2^2}{3^6}$
2) $\frac{2^3 \times 5^3}{7^4}$
3) $\frac{9^8}{10^7}$
4) $\frac{2^8}{5^2}$

5 **1)** C'est une expérience à deux issues donc de Bernoulli.
2) $E(X) = \frac{1}{3} \times 10 + \frac{2}{3} \times (-4) = \frac{2}{3}$.

6 $E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$ et $V(X) = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

7
- Obtenir au moins 7 « Pile » correspond à $X \geqslant 7$
- Obtenir moins de 7 « Pile » correspond à $X < 7$
- Obtenir au plus 7 « Pile » correspond à $X \leqslant 7$
- Obtenir plus de 7 « Pile » correspond à $X > 7$

15 **1)** 1
2) 5005
3) 5005
4) 18

16 **1)** $P(X = 2) \approx 0,311$
2) $P(X = 0) \approx 0,047$
3) $P(X \leqslant 4) \approx 0,959$
4) $P(X \leqslant 6) = 1$
5) $P(X > 3) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 0,179$
6) $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 0,041$

29 **1)** [2 ; 10]
2) $\left[\frac{2}{15}\ ;\ \frac{10}{15}\right]$ soit approximativement [0,13 ; 0,67]

38 **1)** $[a\ ;\ b] = [189\ ;\ 198]$ donc

$\left[\dfrac{a}{n}\ ;\ \dfrac{b}{n}\right] = [0{,}945\ ;\ 0{,}99]$

2) a) $f = \dfrac{190}{200} = 0{,}95$

b) $0{,}95 \in [0{,}945\ ;\ 0{,}99]$ donc on ne peut pas rejeter l'affirmation du fabricant de shampooing.

Auto-évaluation QCM

51 d

52 c

53 d

54 a

55 c

56 d

57 b

LEXIQUE

A

C

Conjecturer (émettre une conjecture)
Proposer une hypothèse que l'on pense être vraie. Le plus souvent, une conjecture est émise suite à l'étude d'une situation ou à des simulations.

Consécutifs (nombres entiers)
Nombres entiers qui se suivent.

Constante (fonction)
On dit qu'une fonction est constante sur un intervalle I lorsque, pour tous a et b appartenant à I tels que $a < b$, on a $f(a) = f(b)$.

Contre-exemple
On utilise un contre-exemple pour prouver qu'une proposition est fausse : le contre- exemple est un cas dans lequel la proposition ne fonctionne pas.

Croissante (fonction strictement)
Voir **Fonction strictement croissante**

D

Décomposition de vecteurs
Soit u et v deux vecteurs non colinéaires du plan. Pour tout vecteur w, il existe un unique couple de réels $(x\,;\,y)$ tels que $w = xu + yv$. Cette forme est appelée décomposition de w selon u et v.

Décroissante (fonction strictement)
Voir **Fonction strictement décroissante**

Développer
Transformer un produit en une somme algébrique.

Distance entre deux réels
Si x et y sont deux réels ayant pour points-images respectifs M et N sur la droite des réels, on appelle distance entre x et y, notée $d(x\,;\,y)$, la distance MN.

E

Encadrement
Réaliser l'encadrement d'un nombre x, c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$. L'amplitude de l'encadrement est $b - a$.

Entier naturel $(\mathbb{N})$
Un nombre entier naturel est un nombre positif dont la partie décimale est nulle.

Entier relatif $(\mathbb{R})$
Un nombre entier relatif est un nombre relatif qui peut s'écrire sans partie décimale.

Équation

Une équation est une égalité dans laquelle se trouve(nt) un (ou plusieurs) nombre(s) inconnu(s).

Équiprobabilité

Soit Ω un univers fini associé à une expérience aléatoire. Si on associe à chaque issue de Ω la même probabilité, on définit sur Ω une loi équirépartie. On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité.

Événement

Un événement est un sous-ensemble de l'univers. Il peut toujours se décrire à l'aide d'issues.

Événement contraire

Soit A un événement. L'événement contraire à A est constitué des issues de Ω ne se trouvant pas dans A et se note A. Sa probabilité vaut $p(A) = 1 - p(A)$.

Événement élémentaire

Un événement élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule issue.

Exposant

Voir **Puissance**

F

Factoriser

Factoriser une expression, c'est transformer une somme algébrique en produit.

Fonction

Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres réels. Définir une fonction f sur $\mathscr{D}$ revient à associer, à chaque réel x de $\mathscr{D}$, un réel *et un seul*, appelé image de x.

Fonction carrée

C'est une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, qui à x associe x^2.

Fonction homographique

On appelle fonction homographique toute fonction h qui peut s'écrire comme quotient de fonctions affines. Sa courbe représentative est une hyperbole qui comporte deux branches disjointes.

Fonction inverse

C'est une fonction, définie sur $\mathbb{R}^*$, qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

Fréquence

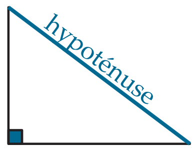
On considère une série statistique avec p modalités (ou p classes), d'effectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$ et d'effectif total N. La fréquence d'apparition de la modalité (ou de la classe) correspond à la proportion d'individus dont le caractère est égal à cette modalité (ou appartient à cette classe). Ainsi, pour tout entier i compris entre 1 et p :

$$f_i = \frac{n_i}{N} \text{ et } f_1 + f_2 + \ldots + f_p = 1$$

H

Hypoténuse

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. C'est aussi le plus grand côté.



I

Identités remarquables

Pour a et b deux nombres relatifs :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Ces identités servent à **Développer** (utilisation de gauche vers la droite) et à **Factoriser** (utilisation de droite vers la gauche).

Incompatibles (événements)

Soit A et B deux événements d'un même univers Ω. A et B sont incompatibles lorsque leur intersection $A \cap B$ est vide.

Indice .... *Page 109*

Inégalité

Une inégalité est une relation d'ordre entre deux grandeurs. Par exemple : $a > b$ ou $a \leqslant b$.
La double barre inférieure indique que a et b peuvent éventuellement être égaux ; sans la double barre a et b sont distincts.

Inéquation

Une inéquation est une inégalité dans laquelle se trouve(nt) un (ou plusieurs) nombre(s) inconnu(s).

Inéquation du second degré .... *Page 17*

Intersection de deux ensembles

Soit A et B deux ensembles. L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments communs à A et à B.

Intervalle de confiance

Un intervalle de confiance au seuil de 95 %, relatif aux échantillons de taille n, est un intervalle centré autour de f_0 où se situe la proportion p du caractère dans la population avec une probabilité égale à 95 %.
L'intervalle $\left[f_0 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \; ; +\frac{1}{\sqrt{n}}$ est donc appelé intervalle de confiance au seuil de 95 %.

intervalle de fluctuation .... *Page 304*

Intervalle interquartile .... *Page 251*

Inverse

Voir **Fonction inverse**

Issue

On appelle issue d'une expérience aléatoire tout résultat possible de cette expérience.

L

Limite .... *Page 137*

Loi binomiale .... *Page 302*

Loi de Bernoulli .... *Page 300*

Loi de probabilité

Définir une loi de probabilité sur un univers Ω, c'est associer à chaque événement élémentaire x_i (i entier naturel compris entre 1 et n) un nombre réel p_i positif ou nul de façon que $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$.

M

Maximum local .... *Page 86*

Médiane

Dans une série statistique, une médiane partage les valeurs prises par le caractère en deux groupes de même effectif.

Mesure principale .... *Page 195*

Minimum local .... *Page 86*

Mode de génération .... *Page 109*

Monotone (fonction) .... *Page 37*

Monotone (suite) .... *Page 134*

Moyenne

La moyenne d'une série statistique se note $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{\text{somme totale des valeurs prises par le caractère}}{\text{nombre de valeurs}}$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_p$ désignent les p modalités du caractère d'une série statistique et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ désignent les effectifs correspondants, alors :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + n_3 \times x_3 + \ldots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_p}$$

N

Nombre dérivé de f en a .... *Page 62*

Norme .... *Page 176*

Norme d'un vecteur .... *Page 176*

O

Orthogonal

Voir **Repère**

Orthonormal

Voir **Repère**

Orthonormé

Voir **Repère**

P

Parabole .... *Page 11*

Prise de décision

En statistique, la prise de décision consiste à rejeter ou non une hypothèse.

Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Produit scalaire .... *Page 220*

Projeté orthogonal .... *Page 225*

Puissance

Pour tout nombre relatif a et tout nombre entier n positif non nul, on définit les puissances de a par :

$$a^n = a \times a \times ... \times a$$

n facteurs égaux à a

Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Dans les deux cas, le nombre n s'appelle l'exposant.

Q

Quartile

Le premier quartile d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 25 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.

Le troisième quartile d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 75 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.

R

Racine carrée

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif qui, élevé au carré (multiplié par lui-même), donne a.

Racines du trinôme du second degré ... *Page 15*

Radian .... *Page 194*

Raison .... *Page 113*

Relation de chasles

Pour tout point A, B et C du plan, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Relation de chasles (angles orientés) . *Page 196*

Relation de récurrence .... *Page 111*

Repère

Définir un repère, c'est donner trois points O, I et J non alignés dans un ordre précis. On note $(O ; I, J)$ ce repère.

- Le point O est appelé l'origine du repère.
- La droite (OI) est l'axe des abscisses orienté de O vers I.
  La longueur OI indique l'unité sur cet axe.
- La droite (OJ) est l'axe des ordonnées orienté de O vers J.
  La longueur OJ indique l'unité sur cet axe.

Repère du plan .... *Page 176*

Repère orthonormé

Un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est dit orthonormé si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de même norme.

Répétition indépendante d'expériences aléatoires ....

Page 299

Représentation graphique d'une fonction

La courbe représentative de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ où x parcourt le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f. Elle est souvent notée C_f.

L'équation de cette courbe représentative est $y = f(x)$.

Représentation graphique d'une suite

Soit (u_n) une suite définie pour $\geq n_0$.

La représentation graphique est l'ensemble des points de coordonnées $(n ; u_n)$ avec $n \geq n_0$.

Réunion de deux ensembles

Soit A et B deux ensembles. La réunion de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.

Somme de termes d'une suite

On appelle somme des termes des n premiers termes d'une suite numérique de premier terme u_1 le nombre $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Attention si le premier terme de la suite est u_0, la somme des n premiers termes est $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$.

Univers

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles appelé également éventualités. On le note Ω.

Suivi éditorial : Marielle Muret-Baudoin
Coordination éditoriale : Adrien Fuchs
Écriture de la maquette en LaTeX : Jean-Côme Charpentier et Sébastien Mengin
Mise en page du manuel en LaTeX : Sébastien Mengin
Couverture : Maro Haas
Maquette intérieure : Nicolas Balbo
Concepteurs/techniciens des interfaces de Sésamath : Thomas Crespin et Daniel Caillibaud

Crédits photographiques
p. 74 : © Roger McLassus/Wikimediacommons ;
p. 132 : © Julian Nitzsche/Wikimediacommons ;
p. 133 : © Derek Ramsey/Wikimediacommons ;
p. 154 : © Soler97/Wikimediacommons